

# ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

322–324 группы, 6-й семестр, 2006–07 уч. год

*Олег Леонидович Виноградов*

1. Простейшие свойства слабой сходимости.
2. Описание слабо сходящихся последовательностей в гильбертовом пространстве и в пространстве непрерывных функций.
3. Функционал Минковского. Теоремы об отделимости.
4. Слабая и  $*$ -слабая топология: задание с помощью семейства полунорм, условия  $*$ -слабой сходимости и ограниченности, слабая замкнутость выпуклого множества, формулировка теоремы Банаха—Алаоглу. Различные виды сходимости последовательностей операторов (с примерами).
5. Свойства поляра. Теорема о биполяре.
6. Определение и простейшие свойства сопряженного оператора.
7. Примеры операторов и их сопряженных. Гцльдеровские условия непрерывности интегрального оператора.
8. Формулы двойственности для ядра и образа.
9. Теорема об условиях нормальной разрешимости (1-я часть).
10. Теорема об условиях нормальной разрешимости (2-я часть).
11. Обратимость оператора и его сопряженного (с леммой).
12. Алгебра операторов. Спектральный радиус. Теорема Банаха об обратимости оператора, близкого к тождественному.
13. Обратимость оператора, близкого к обратимому.
14. Свойства резольвенты.
15. Свойства спектра.
16. Теорема о спектральном радиусе.
17. Примеры спектров операторов в пространствах последовательностей.
18. Спектр оператора умножения, оценки спектрального радиуса интегральных операторов, спектральный радиус оператора Вольтерра.
19. Теорема об изоморфизме конечномерных пространств и ее следствия.
20. Лемма о почти перпендикуляре и теорема Рисса о характеристике конечномерных пространств.
21. Теорема Хаусдорфа (с леммой и следствием).
22. Теорема Арцела—Асколи. Условие Липшица.
23. Определение и простейшие свойства компактных операторов.
24. Операторы конечного ранга.
25. Компактность операторов Фредгольма, Вольтерра и Гильберта—имидта.
26. Теорема иаудера.
27. Слабый принцип выбора в гильбертовом пространстве. Компактные операторы и слабая сходимость.
28. Лемма об ограниченных прообразах и теорема об условиях нормальной разрешимости уравнения второго рода.
29. Условия однозначной разрешимости уравнения второго рода.
30. Лемма о биортогональных системах и теорема о размерности ядер оператора вида тождественный минус компактный и его сопряженного.
31. Альтернатива Фредгольма. Теорема Никольского о характеристике фредгольмовых операторов.
32. Теорема о спектре компактного оператора (с леммой).
33. Определение и простейшие свойства эрмитовски сопряженного оператора, примеры.
34. Условия обратимости и формулы двойственности для ядра и образа оператора и эрмитовски сопряженного.
35. Теорема о характеристике нормального оператора (с леммой).
36. Теорема о спектре нормального оператора (с леммой).
37. Теорема о характеристике самосопряженного оператора.
38. Границы самосопряженного оператора. Теорема о спектре самосопряженного оператора.
39. Характеристика ортогональных проекторов.

40. Унитарные операторы.
41. Теорема Гильберта—имидта.
42. Следствия теоремы Гильберта—имидта.
43. Представление имидта симметричного ядра.
44. Представление имидта компактного оператора.
45. Свойства многочленов от оператора. Лемма об отображении спектров.
46. Определение и свойства непрерывных функций самосопряженного оператора.
47. Квадратный корень из оператора. Формулировка теоремы о декартовом и полярном представлении нормального оператора.
48. Спектральные меры. Построение борелевских функций самосопряженного оператора.
49. Свойства борелевских функций самосопряженного оператора.
50. Спектральные проекторы и проекторнозначные меры.
51. Интегрирование по проекторнозначной мере.
52. Спектральная теорема для самосопряженного оператора.
53. Две леммы о ступенчатых функциях в пространствах  $L_p$ .
54. Плотность множества непрерывных финитных функций в пространствах  $L_p$  (со следствием).
55. Теорема о непрерывности сдвига.
56. Теорема о существовании и свойствах свертки.
57. Теорема об аппроксимативной единице.
58. Усреднение по Соболеву. Плотность множества гладких финитных функций в  $L_p(\mathbb{R}^n)$ .
59. Свойства функций класса иварца.
60. Теорема Планшереля и ее следствия.
61. Спектральная теорема для преобразования Фурье.
62. Функции Эрмита.