И.К. Даугавет

Лекции по методам вычислений.

г. Санкт-Петербург 2004г.

Глава 1
Приближение функций и интерполяция

§1. Равномерное приближение функций. Полиномы Чебышева.

Идеи приближения функций пронизывают всю вычислительную математику.

Чем приближать? Мы будем рассматривать приближение полиномами.

Как измерять близость функций? Равномерная близость.

Поясним, что это значит. Множество функций, заданных и непрерывных на промежутке $[a, b]$, обозначим через $C = C[a, b]$ и каждой функции $f \in C$ сопоставим число $\|f\| = \|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, называемое нормой функции f (в пространстве C). Отметим свойства нормы:

$\langle 1\rangle$ $\|f\| \geq 0$ и $\|f\| = 0$ в том и только в том случае, если $f(x) \equiv 0$;

$\langle 2\rangle$ $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$;

$\langle 3\rangle$ $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (неравенство треугольника).

Из свойства $\langle 3\rangle$ следует, что для любых функций $f, g \in C$ выполняется неравенство $\big| \|f\| - \|g\| \big| \leq \|f - g\|$.

Пусть дана последовательность функций $\{ f_n \} \subset C$. Соотношение $\|f_n - f\| \to 0$ (сходимость по норме в C) означает равномерную сходимость последовательности $\{ f_n \}$ к f.

Введем обозначение: $\mathbb{P}_n = \{P_n\}$ — множество всех полиномов степени не выше n.

В терминах нормы известная из курса анализа 1-я теорема Вейерштрасса может быть сформулирована в виде

Теорема (1-я теорема Вейерштрасса). Для любой функции $f \in C$ по любому $\varepsilon > 0$ найдутся такое n и такой $P_n \in \mathbb{P}_n$, что $\|f - P_n\| < \varepsilon$.

Определение. *Наилучшим приближением* функции $f \in C$ полиномами степени n называется число

$$E_n(f) = \inf_{P_n\in\mathbb{P}_n} \|f - P_n\|.$$

Полином $P_n \in \mathbb{P}_n$ называется *полиномом наилучшего приближения* функции f, если $\|f - P_n\| = E_n(f)$.

Теорема Вейерштрасса означает, что для любой $f \in C$ $E_n(f) \to 0$.

Докажем существование полинома наилучшего приближения.

Лемма 1. $F(A) = F(a_0, \dots, a_n) = \|f - P_n\|_C$, где $P_n(x) = P_n(A, x) = a_0 + \dots + a_n x^n$, есть непрерывная функция аргументов a_k.

Доказательство. Положим $c = \max\{|a|,\ |b|\}$. Тогда в понятных обозначениях

$$|F(A + \Delta A) - F(A)| \le \left\| \sum_{k=0}^{n} \Delta a_k x^k \right\| \le \sum_{k=0}^{n} |\Delta a_k| c^k \le \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \Delta a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} c^{2k}}. \ \blacksquare$$

Лемма 2. Существует такая постоянная m, зависящая лишь от n и промежутка $[a, b]$, что для любого $P_n \in \mathbb{P}_n$ $(P_n = a_0 + \dots + a_n x^n)$ выполняется неравенство

$$\|P_n\| \ge m \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{1/2}$$

Доказательство этой леммы будет получено позднее, в §1 главы 3, как следствие более общего утверждения.

Теорема. Для любой функции $f \in C[a, b]$ существует полином наилучшего приближения $P_n \in \mathbb{P}_n$.

Доказательство. Требуется доказать, что непрерывная функция $F(A)$, определенная в лемме 1, достигает своего наименьшего значения. Положим $R = 2\|f\|/m$ ($m > 0$ — число из леммы 2). В шаре $S_R = \{\, A \ \mid \ \sum a_k^2 \le R^2 \,\}$ функция $F(A)$ достигает своего наименьшего значения в некоторой точке $A^* \in S_R$ (т.к. S_R — замкнутое ограниченное множество). Если же $A \notin S_R$, то

$$F(A) = \|f - P_n(A, \cdot)\| \ge \|P_n(A, \cdot)\| - \|f\| > mR - \|f\| = \|f\| = F(0) \ge F(A^*),$$

так что A^* — точка глобального минимума. $\blacksquare$

Известно, что для любой непрерывной функции $f \in C$ ее полином наилучшего приближения в классе $\mathbb{P}_n$ единственный, но это утверждение оставим без доказательства.

Рассмотрим одну частную, но очень важную задачу. На промежутке $[-1, 1]$ для функции $f(x) = x^n$ требуется построить ее полином наилучшего приближения степени $n - 1$. Если $Q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ решает поставленную задачу, то $P_n(x) = x^n - Q_{n-1}(x)$ есть полином степени n со старшим коэффициентом 1, решающий задачу: среди всех полиномов степени n со старшим коэффициентом 1, найти тот, для которого $\|P_n\|_{C[-1,1]}$ минимальна (эти две задачи эквивалентны). Полином, решающий вторую задачу, называется *полиномом, наименее уклоняющимся от нуля.*

Определение. Полиномом Чебышева степени n называется функция, задаваемая на промежутке $[-1, 1]$ формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Из формулы $\cos(n+2)\theta = 2cos\theta\ \cos(n+1)\theta - \cos n\theta$ легко получается *рекуррентная формула* для многочленов Чебышева:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x),$$

которая (учитывая, что $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$) позволяет легко доказать методом индукции, что $T_n(x)$ есть полином степени n со старшим коэффициентом (при $n \geq 1$) 2^{n-1}.

В широком смысле полиномами Чебышева называют также полиномы, отличающиеся от $T_n(x)$ постоянным множителем.

Непосредственно из определения легко находятся точки y_k максимума модуля и корни x_k полинома T_n:

$$y_k = \cos\frac{2k\pi}{n}\ \ (k = 0, \dots, n), \quad x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{n}\ \ (k = 1, \dots, n).$$

Теорема. Наименее уклоняется от нуля *приведенный* многочлен Чебышева $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

Доказательство. $\tilde{T}_n(y_k) = (-1)^k/2^{n-1}$. Если $P_n(x) = x^n + \dots$ таков, что $\|P_n\| < \|\tilde{T}_n\|$, то $\operatorname{sign}(\tilde{T}_n - P_n)(y_k) = (-1)^k$ и $\tilde{T}_n - P_n$ имеет n корней, так что $P_n \equiv \tilde{T}_n$, что невозможно. ■

Следствие. $E_{n-1}(x^n) = 1/2^{n-1}$.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, для функции x^n и ее полинома наилучшего приближения степени $n-1$ нашлись такие $n+1$ точки (это точки y_k), в которых разность между ними достигает максимального по величине значения с чередующимися знаками. Это — общее явление. Верна

Теорема П.Л.Чебышева (без доказательства). Пусть $f \in C$, $P_n \in \mathbb{P}_n$. Для того чтобы P_n был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно существование *чебышевского альтернанса*, т.е. таких точек $a \le x_1 < \cdots < x_{n+2} \le b$, что

1) $|f(x_k) - P_n(x_k)| = \|f - P_n\|$,

2) $\operatorname{sign}\bigl(f(x_k) - P_n(x_k)\bigr) = -\operatorname{sign}\bigl(f(x_{k+1}) - P_n(x_{k+1})\bigr)$.

Гладкие функции хорошо приближаются полиномами. Без доказательства приведем теорему:

Теорема. (Д.Джексон, 1912). При каждом натуральном p найдется такая постоянная c_p, что для любой функции $f \in C^{(p)}[a,b]$ выполняются неравенства

$$E_n(f) \le \frac{c_p}{n^p}(b-a)^p \|f^{(p)}\| \quad (n \ge p-1).$$

Задача 1. Показать, что в теореме Джексона условие $n \ge p-1$ существенно.

Задача 2. Доказать теорему о единственности полинома наилучшего приближения, используя теорему об альтернансе. *Указание:* Показать, что если полиномов наилучшего приближения два, то их полусумма также полином наилучшего приближения и воспользоваться тем, что для него существует альтернанс.

Задача 3. Показать, что если для полинома $P_n \in \mathbb{P}_n$ при всех $x \in [-1,1]$ выполняется неравенство $|P_n(x)| \le 1$, то при $x > 1$ будет $|P_n(x)| \le T_n(x)$.

§2. Конечные и разделенные разности

Определение. Дано $h > 0$. Конечной разностью с шагом h функции $f \in C[a,b]$ называется функция $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$. Конечные разности высших порядков определяются рекурсивно: $\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$.

Конечная разность $\Delta^k f$ задана на промежутке $[a, b-kh]$.

Конечные разности — аппарат работы с функциями, заданными таблично в равноотстоящих узлах. Если нам известны значения функции f в точках $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, \ldots, N$, то в тех же узлах при $j = 0, \ldots, N-k$ могут быть вычислены и значения $\Delta^k f$. В таблицах, которые наряду со значениями функции содержат и значения ее разностей, каждую следующую разность обычно принято размещать на полстроки ниже, так что такая таблица выглядит так (если приводятся разности до 3-го порядка):

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$	
		Δf_{n-1}		$\Delta^3 f_{n-2}$
x_n	f_n		$\Delta^2 f_{n-1}$	
		Δf_n		$\Delta^3 f_{n-1}$
x_{n+1}	f_{n+1}		$\Delta^2 f_n$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Отметим основные свойства конечных разностей.

$\langle 1\rangle$ Если $f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$, то $\Delta^k f = \alpha_1 \Delta^k g_1 + \alpha_2 \Delta^k g_2$.

$\langle 2\rangle$ Если p — полином степени n, то Δp — полином степени $n-1$, $\Delta^k p$ — полином степени $n-k$, в частности, $\Delta^n p$ — постоянная, а разности высших порядков тождественно равны нулю.

$\langle 3\rangle$ Непосредственно через значения самой функции конечные разности выражаются формулой:

$$\Delta^k f_0 = f_k - C_k^1 f_{k-1} + C_k^2 f_{k-2} + \dots + (-1)^k f_0.$$

Здесь C_k^j — биномиальные коэффициенты. Формула легко доказывается методом индукции с учетом известного равенства $C_{k-1}^j + C_{k-1}^{j-1} = C_k^j$.

Если ввести "оператор сдвига" $Ef(x) = f(x+h)$, то приведенная формула может быть записана в символической форме $\Delta^k = (E-1)^k$. Имеется в виду, что правая часть раскрывается по формуле бинома Ньютона.

$\langle 4\rangle$ Значение функции f в точке x_k может быть выражено через значения ее разностей в точке x_0:

$$f_n = f_0 + C_n^1 \Delta f_0 + C_n^2 \Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^n f_0.$$

Формула также легко доказывается методом индукции. Для доказательства возможности индуктивного перехода следует воспользоваться тем, что $f_n = f_{n-1} + \Delta f_{n-1}$ и для обеих функций, стоящих справа, воспользоваться индуктивным предположением. Мнемоническая запись формулы: $E^n = (1+\Delta)^n$.

$\langle 5 \rangle$ Если функция f r раз непрерывно дифференцируема ($f \in C^{(r)}$), то таковы же и ее конечные разности и $(\Delta^k f)^{(r)}(x) = (\Delta^k f^{(r)})(x)$.

$\langle 6 \rangle$ Если функция f k раз непрерывно дифференцируема, то найдется такая точка $\xi \in (x_0, x_0 + kh)$, что $\Delta^k(x_0) = h^k f^{(k)}(\xi)$. При $k = 1$ доказываемое свойство есть формула Лагранжа. Возможность индуктивного перехода следует из цепочки равенств:

$$\Delta^k f(x_0) = \Delta^{k-1} f(x_0 + h) - \Delta^{k-1} f(x_0) = h\Delta^{k-1} f'(\eta) = h^k f^{(k)}(\xi).$$

Здесь $\eta \in (x_0, x_0 + h)$, $\xi \in (\eta, \eta + (k-1)h) \subset (x_0, x_0 + kh)$.

При работе с таблично заданными функциями при неравноотстоящих узлах конечные разности заменяются разделенными.

Определение. Разделенной разностью (разностным отношением) первого порядка функции $f(x)$ называется функция двух переменных

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (x_1 \neq x_0).$$

Разделенные разности высших порядков определяются рекурсивно, причем разделенная разность k-го порядка есть функция $(k+1)$-го попарно не совпадающих аргументов:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \frac{f(x_1, \ldots, x_k) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

Перечислим основные свойства разделенных разностей.

$\langle 1 \rangle$ Если $f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$, то

$$f(x_0, \ldots, x_k) = \alpha_1 g_1(x_0, \ldots, x_k) + \alpha_2 g_2(x_0, \ldots, x_k)$$

.

⟨2⟩ Справедливо представление:

$$f(x_0,\dots,x_k)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_k)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_k)}+ \\ +\dots+\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})}.$$

Доказательство проводится методом индукции. При $k=1$ формула очевидна. Возможность индуктивного перехода от k к $k+1$ покажем только для $k=1$ — общий случай не сложнее в идейном отношении, но громоздок. Итак,

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}= \\ =\frac{1}{x_2-x_0}\left[\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}\right]-\frac{1}{x_2-x_0}\left[\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\right]= \\ =\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{x_2-x_0}\left[\frac{1}{x_1-x_2}-\frac{1}{x_1-x_0}\right]+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

и остается заметить, что

$$\frac{1}{x_1-x_2}-\frac{1}{x_1-x_0}=\frac{x_2-x_0}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}. \quad \blacksquare$$

⟨3⟩ Разделенная разность $f(x_0,\dots,x_k)$ есть симметричная функция своих аргументов, т.е. от перестановки аргументов ее значение не меняется. Это свойство есть непосредственное следствие предыдущего.

Теперь можно сказать, что разделенная разность k-го порядка есть первая разделенная разность от $(k-1)$-й по любому ее аргументу.

⟨4⟩ Если p — полином степени n, то разделенная разность порядка k есть полином степени $n-k$ от $k+1$ аргументов.

⟨5⟩ Справедливо представление

$$f(x_n)=f(x_0)+(x_n-x_0)f(x_0,x_1)+(x_n-x_0)(x_n-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+ \\ +\dots+(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})f(x_0,\dots,x_n).$$

Доказательство проводится методом индукции. При $n = 1$ формула очевидна. Покажем возможность индуктивного перехода от $n-1$ к n. Используя индуктивное предположение для точек $x_0, \dots, x_{n-2}, x_n$, имеем

$$f(x_n) = f(x_0) + (x_n - x_0) f(x_0, x_1) + \dots + \\ + (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-2}) f(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n)$$

и остается воспользоваться тем, что

$$f(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n) = f(x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) + f(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n)(x_n - x_{n-1}).$$

$\langle 6 \rangle$ Пусть $\alpha = \min x_k$, $\beta = \max x_k$. Если на промежутке $[\alpha, \beta]$ функция f n раз непрерывно дифференцируема ($f \in C^{(n)}$), то найдется такая точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, что

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Доказательство. Рассмотрим полином степени n

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, \dots, x_n)$$

и функцию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Очевидно, что $\varphi \in C^{(n)}$. Согласно предыдущему свойству $P_n(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, \dots, n)$, так что функция φ имеет на $[\alpha, \beta]$ не менее чем $n+1$ различных корней. По теореме Ролля φ' имеет на (α, β) не менее n корней, φ'' — не менее, чем $n-1$, и $\varphi^{(n)}$ по меньшей мере один корень ξ. Но $\varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n! f(x_0, \dots, x_n)$. ■

Доказанное свойство позволяет нам доопределить по непрерывности разделенную разность порядка n на случай, когда все или некоторые из ее аргументов совпадают.

$\langle 7 \rangle$ Если функция f n раз непрерывно дифференцируема на промежутке $[a, b]$, то при $k \le n$ разделенная разность $f(x_0, \dots, x_k)$ может быть продолжена по непрерывности на весь “куб” $[a, b]^{k+1}$, причем если $x_0 = x_1 = \dots = x_k$, то

$$f(x_0, x_0, \dots, x_0) = \frac{1}{k!}, \tag{1}$$

а если среди аргументов $x_0, \dots, x_k$ имеются хоть два различных (для определенности $x_0 \neq x_k$), то[1]

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \qquad (2)$$

Для доопределенных таким образом по непрерывности разделенных разностей сохраняются свойства $\langle 1 \rangle$, $\langle 3 \rangle$-$\langle 6 \rangle$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $f(x_0, \dots, x_k)$ доопределена по непрерывности на случай хотя бы нескольких совпадающих аргументов, то для нее выполняются свойства $\langle 1 \rangle$, $\langle 3 \rangle$-$\langle 6 \rangle$. Это легко доказывается предельным переходом. Непрерывность доопределенной формулами (1)-(2) на случай совпадающих аргументов разделенной разности доказывается индукцией по k и следует из непрерывности производных f^k $(k \leq n)$. ■

Ар-гу-мен-ты разделенной разности часто называют узлами. Если некоторый узел встречается среди аргументов разделенной разности k раз, то его называют узлом кратности k. Для того чтобы вычислить $f(x_0, \dots, x_n)$, согласно формулам (1)-(2) достаточно знать в каждом узле x_k значение самой функции f и ее производных до порядка $m-1$ включительно, если кратность этого узла есть m. Если функция f n раз непрерывно дифференцируема, то ее разделенные разности порядка выше n определены и непрерывны для тех значений аргументов, когда кратность каждого узла не превышает n.

$\langle 8 \rangle$ Если точки x_k равноотстоящи: $x_k = x_0 + kh$, то очевидна связь между конечными и разделенными разностями:

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{h^n n!} \Delta^n(x_0).$$

[1] Обратим внимание, что это *рекуррентное* (по k) определение.

Таблица разделенных разностей обычно выглядит так:

$$
\begin{array}{ccccc}
x & f(x) & f(x,y) & f(x,y,z) & f(x,y,z,t) \\
x_0 & f(x_0) & & & \\
 & & f(x_0,x_1) & & \\
x_1 & f(x_1) & & f(x_0,x_1,x_2) & \\
 & & f(x_1,x_2) & & f(x_0,x_1,x_2,x_3) \\
x_2 & f(x_2) & & f(x_1,x_2,x_3) & \\
 & & f(x_2,x_3) & & f(x_1,x_2,x_3,x_4) \\
x_3 & f(x_3) & & f(x_2,x_3,x_4) & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Заметим, что если аргументы расположены в порядке возрастания и среди них имеются кратные, причем в кратных узлах нам известны необходимые значения производных функции f, то вычисление всех находящихся в таблице значений разделенных разностей не составляет труда и в этом случае.

Задача. Пусть $N > M \geq 0$ целые. Доказать:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\frac{(N+k)!}{(M+k)!} = \begin{cases} 0 & \text{при } N-M<n \\ n! & \text{при } N-M=n. \end{cases}$$

§3. Алгебраическая интерполяция

Общая постановка задачи интерполяции такова. На промежутке $[a,b]$ задана система непрерывных функций $\{\varphi_k(x)\}$ $(k=0,\dots,n)$. Линейные комбинации этих функций называются обобщенными полиномами (по системе $\{\varphi_k\}$). Заданы попарно различные точки $x_0,\dots,x_n$ промежутка $[a,b]$, называемые узлами[2]. Ставится задача: для произвольно заданной на $[a,b]$ функции $f(x)$ построить такой “полином” $q=\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k$, который удовлетворял бы равенствам $q(x_k)=f(x_k)$ $(k=0,\dots,n)$.

Две ипостаси задачи: 1) приближение функции более простыми, 2) функция f известна нам лишь в конечном числе точек, а нас интересуют ее значения в других точках.

Будет ли поставленная задача разрешима?

Определение. Система функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ называется *чебышевской* на $[a,b]$, если любой нетривиальный “полином” $q=\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k$ (т.е. такой, что хоть один из его коэффициентов a_k отличен от нуля) имеет на $[a,b]$ не более n корней.

Теорема 1. Для того чтобы система $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора попарно различных точек $x_0,\dots,x_n\in[a,b]$ определитель

$$\Delta(x_0,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0)\\ \dots & \dots & \dots\\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}$$

был отличен от нуля.

Доказательство. Докажем, что для того чтобы наша система *не была* чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие попарно различные точки x_k, что $\Delta(x_0,\dots,x_n)=0$. Действительно, если система *не* чебышевская, то найдется нетривиальный “полином” q, который имеет по меньшей мере $n+1$ корень. Пусть $x_0,\dots,x_n$ — его корни. Тогда его коэффициенты удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_0\varphi_0(x_0)+\dots+a_n\varphi_n(x_0)&=0\\ \dots&\\ a_0\varphi_0(x_n)+\dots+a_n\varphi_n(x_n)&=0\end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

---

[2] Когда точки некоторой системы будут называться узлами, то всегда будет иметься в виду, что они попарно различны.

Итак, система однородных уравнений (1) имеет ненулевое решение и, значит, ее определитель $\Delta(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Обратно, пусть нашлись такие попарно различные точки $x_0, \ldots, x_n$, что $\Delta(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Тогда система однородных уравнений (1) имеет ненулевое решение, и компоненты этого решения будут коэффициентами "полинома", который имеет все точки $x_0, \ldots, x_n$ своими корнями. ∎

Теорема 2. Для того чтобы для любой системы узлов $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ интерполяционная задача $q(x_k) = f_k$ была однозначно разрешима, необходимо и достаточно, чтобы система φ_k была чебышевской.

Доказательство. Если искать интерполяционный полином в форме $q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$, то требования $q(x_k) = f_k$ дадут систему $(n+1)$ линейных уравнений относительно его $(n+1)$ коэффициента с определителем $\Delta(x_0, \ldots, n)$. Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости этой системы является отличие от нуля определителя. Поэтому остается сослаться на предыдущую теорему. ∎

Поскольку любой полином $P_n \in \mathbb{P}_n$ имеет не более n попарно различных корней, то система $\{1, x, \ldots, x^n\}$ является чебышевской на любом промежутке $[a, b]$, и из теоремы 2 немедленно вытекает

Следствие. Каковы бы ни были узлы $x_0, \ldots, x_n$ и числа $f_0, \ldots, f_n$ существует и притом единственный полином $P_n \in \mathbb{P}_n$, такой что при $k = 0, \ldots, n \;\; P_n(x_k) = f_k$.

Если f_k — это значения в узлах некоторой функции $f(x)$, то P_n называется интерполяционным полиномом функции f.

Дальше будем рассматривать задачу построения алгебраического интерполяционного полинома.

Обозначим через $l_k(x)$ полином, решающий интерполяционную задачу[3]

$$l_k(x_j) = \delta_{kj}. \tag{2}$$

Легко видеть, что тогда полином $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f_k$ удовлетворяет равенствам $P_n(x_j) = f_j$. Поэтому интерполяционный полином функции $f(x)$

[3] δ_{kj} — символ Кронекера.

может быть записан в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k). \tag{3}$$

Эта формула называется *интерполяционной формулой Лагранжа*, а полиномы $l_k(x)$ — фундаментальными полиномами интерполяции или полиномами влияния Лагранжа. Для этих полиномов нетрудно указать явное представление:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}\dots(x_k-x_n)} = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)},$$

где $\omega(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$.

Дру-гое представление интерполяционного полинома принадлежит Ньютону:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0,x_1) + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})f(x_0,\dots,x_n).$$

Это — интерполяционная формула Ньютона. Полином P_n использовался при доказательстве свойства $\langle 6 \rangle$ разделенных разностей, там и было показано, что он удовлетворяет равенствам $P_n(x_k) = f(x_k)$.

Сравнение этих двух формул. Формула Ньютона удобнее для вычислений, в частности, тем, что легко добавлять новые узлы и вопрос о числе узлов можно решать в процессе вычислений. Формула Лагранжа удобна в теоретических вопросах интерполяции. В практических применениях она удобнее, если нужно интерполировать много функций по одной и той же системе узлов.

Рассмотрим случай равноотстоящих узлов: $x_k = x_0 + kh$. Поскольку в основе формул будет лежать формула Ньютона, можно указывать лишь порядок привлечения узлов.

1. Пусть значения функции $f(x)$ известны в узлах $x_0, x_1, \dots$ и точка x, в которой нам нужно найти ее значение, лежит вблизи x_0. Тогда привлекая узлы в порядке $x_0, x_1, \dots$, делая замену $x = x_0 + th$ и учитывая, что $x - x_k = h(t-k)$ и $f(x_0,\dots,x_k) = \frac{1}{h^k k!}\Delta^k f_0$, имеем

$$P(x_0+th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots.$$

Это — формула Ньютона для начала таблицы.

2. Пусть значения функции $f(x)$ известны в точках $\ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ и точка интерполяции x лежит вблизи точки x_n. Естественный порядок привлечения узлов $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$. Так же, как в предыдущем случае, учитывая при этом, что при замене разделенной разности конечной аргументом у конечной разности будет наименьший из аргументов разделенной, имеем:

$$P(x_n + th) = f_n + t\Delta f_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 f_{n-3} + \ldots.$$

Это — формула Ньютона для конца таблицы.

3. Пусть значения функции $f(x)$ известны в узлах $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ и точка интерполяции x лежит между x_0 и x_1. Будем привлекать узлы интерполяции в порядке $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \ldots$. Тогда так же как в двух предыдущих случаях получим

$$P(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 f_{-1} +$$
$$+ \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 f_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 f_{-2} + \ldots.$$

Это — формула Ньютона - Гаусса для середины таблицы.

Задача 1. Показать, что если функция $g(x)$ такова, что на промежутке $[a,b]$ $g^{(n)}(x) > 0$, то на этом промежутке система функций $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, g(x)$ чебышевская.

Задача 2. Показать, что система функций $1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}$ чебышевская на любом промежутке.

§4 Погрешность интерполяции

Пусть на $[a,b]$ заданы узлы $x_0, \ldots, x_n$. Для функции $f \in C[a,b]$ ее интерполяционный полином, построенный по этим узлам, условимся обозначать через $Q_n f$, а значение этого полинома в точке x через $Q_n(f;x)$. Отметим очевидные свойства:

1. $Q_n f \in \mathbb{P}_n$;
2. $Q_n(\alpha_1 f_1 + \alpha_1 f_2) = \alpha_1 Q_n f_1 + \alpha_2 Q_n f_2$ (линейность);

3. для любого $P_n \in \mathbb{P}_n \quad Q_n P_n = P_n$.

Разность $R_n(f;x) = f(x) - Q_n(f;x)$ есть погрешность (остаточный член) интерполяции.

Теорема 1. Если функция f $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ ($f \in C^{(n+1)}[a,b]$), то для каждой точки $x \in [a,b]$ найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, что

$$R_n(f;x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \omega(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n). \tag{1}$$

Доказательство. Если x совпадает с одним из узлов, то (1) очевидно — левая и правая части равны нулю. При x отличным от всех узлов воспользуемся свойством $\langle 5\rangle$ разделенных разностей для узлов $x_0, \dots, x_n, x$. Имеем:

$$f(x) = Q_n(f;x) + \omega(x) f(x_0, \dots, x_n, x),$$

и для завершения доказательства остается воспользоваться свойством $\langle 6\rangle$ разделенных разностей. ■

Остановимся на двух задачах выбора узлов интерполяции. Пусть $U \subset C[a,b]$ — некоторый класс непрерывных функций. При заданных узлах интерполяции введем обозначения:

$$R_n(U;x) = \sup_{f\in U} |R_n(f;x)|, \quad R_n(U) = \sup_{f\in U} \|R_n f\|_C -$$

погрешности (остатки) интерполяции на классе U. Для класса функций

$$KC^{(n+1)} = \{\, f \in C^{(n+1)} \mid \|f^{(n+1)}\|_C \le K \,\} \quad (K > 0)$$

эти погрешности легко вычисляются:

Теорема 2. Справедливы равенства:

$$R_n(KC^{(n+1)};x) = \frac{K|\omega(x)|}{(n+1)!}, \quad R_n(KC^{(n+1)}) = \frac{K\|\omega\|_C}{(n+1)!}.$$

Доказательство. То, что левая часть первого из этих равенств не превосходят правой, сразу же следует из теоремы 1. Докажем обратное неравенство. Рассмотрим функцию $f_0(x) = \frac{K}{(n+1)!}\omega(x)$. Так как

$f_0^{(n+1)} \equiv K$, то $f_0 \in KC^{(n+1)}$. Очевидно, что $Q_n f_0 \equiv 0$, и потому $|R_n(f_0;x)| = |f_0(x)| = \frac{K|\omega(x)|}{(n+1)!}$, что и завершает доказательство первого равенства. Второе следует из первого ввиду очевидного тождества $R_n(KC^{(n+1)}) = \sup_x R_n(KC^{(n+1)};x)$. ■

При заданном классе U (или классе U и точке x) величина $R_n(U)$ (соответственно $R_n(U;x)$) есть функция узлов, и можно ставить задачу о минимизации этой функций. Те узлы, на которых функция $R_n(U)$ достигает минимального значения, называются *оптимальными* узлами для класса U.

Задача 1. Пусть на промежутке $[a,b]$ задано большое количество узлов $N > n+1$, в которых нам известны значения каких-то функций. Нас интересуют значения этих функций в некоторой точке x, отличной от всех узлов. Для вычисления этих значений мы хотим использовать интерполяцию по $n+1$ узлу. Задача состоит в таком выборе этих узлов из числа данных, чтобы для некоторого заданного класса функций U величина $R_n(U;x)$ была минимальной. Эта задача легко решается для класса $U = KC^{(n+1)}$. Действительно, в полученном в теореме 2 представлении остатка от узлов зависит только множитель $|\omega(x)|$, его-то и нужно минимизировать, а для этого следует выбрать из наших N узлов ближайшие к точке x. Заметим, что этот принцип учитывался для выбора порядка привлечения узлов при построении интерполяционных формул с равноотстоящими узлами в §3.

Задача 2 — это задача о выборе оптимальных узлов для класса U, т.е. таких узлов, для которых величина $R_n(U)$ минимальна. Решать эту задачу будем для класса функций $KC^{(n+1)}[-1,1]$.

Теорема 3. Оптимальными узлами для класса функций $KC^{(n+1)}[-1,1]$ являются корни полинома Чебышева $T_{n+1}(x)$: $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ $(k = 0,\dots,n)$, называемые узлами Чебышева. Для этих узлов

$$R_n(KC^{(n+1)}[-1,1]) = \frac{K}{2^n(n+1)!}. \tag{2}$$

Доказательство. Для узлов Чебышева $\omega(x) = \tilde{T}_{n+1}(x)$, и (2) немедленно следует из теоремы 2 и равенства $\|\tilde{T}_{n+1}\|_C = \frac{1}{2^n}$. Поскольку полином Чебышева наименее уклоняется от нуля и для любых узлов $\omega(x)$ есть полином степени $n+1$ со старшим коэффициентом, равным 1, то всегда

$\|\omega\|_C \geq \|\tilde{T}_{n+1}\|_C = \frac{1}{2^n}$, и потому для любых узлов $R_n(KC^{(n+1)}) \geq \frac{K}{2^n(n+1)!}$
■

З а м е ч а н и е. В случае произвольного промежутка $[a, b]$ оптимальные узлы для класса $KC^{(n+1)}[a, b]$ можно получить, если с помощью линейной замены переменной промежуток $[a, b]$ свести к промежутку $[-1, 1]$ — образы узлов Чебышева и будут оптимальными узлами для этого класса, и для этих узлов

$$R_n(KC^{(n+1)}[a, b]) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{K}{2^n(n+1)!}.$$

Другой подход к оценке погрешности интерполяции связан с понятием функций и постоянных Лебега.

Определение. Функцией Лебега узлов $x_0, \ldots, x_n$ называется

$$\lambda_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|.$$

Здесь $l_k(x)$ — фундаментальные полиномы интерполяции. Постоянной Лебега узлов называется $\lambda_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \lambda_{n+1}(x)$.

Лемма. Для любой $f \in C[a, b]$ выполняются неравенства

$$|Q_n(f; x)| \leq \lambda_{n+1}(x)\|f\|_C, \quad \|Q_n f\|_C \leq \lambda_{n+1}\|f\|_C. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое из неравенств (3) есть очевидное следствие интерполяционной формулы Лагранжа. Для доказательства второго достаточно взять максимум по x от левой и правой части первого. ■

Теорема 4. Для любой $f \in C[a, b]$ выполняются неравенства

$$|R_n(f; x)| \leq \big(\lambda_{n+1}(x) + 1\big)E_n(f), \quad \|R_n(f)\| \leq (\lambda_{n+1} + 1)E_n(f).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P_n \in \mathbb{P}_n$ — полином наилучшего приближения функции f. Тогда имеем

$$|R_n(f; x)| \leq |f(x) - P_n(x)| + |P_n(x) - Q_n(f; x)| = |f(x) - P_n(x)| +$$
$$+ |Q_n(P_n - f; x)| \leq E_n(f) + \lambda_{n+1}(x)\|P_n - f\|_C = \big(\lambda_{n+1}(x) + 1\big)E_n(f).$$

Этим доказано первое неравенство. Второе получается из первого, если в левой и правой его части перейти к максимумам по x. ■

С функцией и постоянной Лебега связаны вопросы сходимости интерполяционных полиномов к функции. Будем говорить, что для промежутка $[a, b]$ задан интерполяционный процесс, если при каждом n на этом промежутке заданы узлы $x_0^n, \ldots, x_n^n$. Тогда $Q_n(f; x)$ — интерполяционный полином функции f, построенный по этим узлам. Говорят, что интерполяционный процесс для функции f сходится в точке x (сходится равномерно на $[a, b]$), если соответственно при $n \to \infty$ будет $Q_n(f; x) \to f(x)$ или $\|f - Q_n f\|_C \to 0$ (т.е. $Q_n f$ сходятся к f равномерно на $[a, b]$). Из теоремы 4 сразу же вытекает

Следствие. Если для некоторой непрерывной функции f выполняется соотношение $\lambda_{n+1}(x) E_n(f) \to 0$, то интерполяционный процесс для этой функции сходится в точке x. Если же $\lambda_{n+1} E_n(f) \to 0$, то интерполяционный процесс для нее сходится равномерно.

Известно, что для любого интерполяционного процесса $\lambda_{n+1} \to \infty$. С этим связана теорема Фабера (оба этих утверждения оставляем без доказательства):

Теорема (Фабер). Для любого интерполяционного процесса найдется такая непрерывная функция, для которой этот процесс не сходится равномерно.

С функцией и постоянной Лебега связана еще оценка погрешности в интерполяционном полиноме, возникающая вследствие неточного вычисления значений функции в узлах. Пусть при вычислении значений функции $f(x_k)$ мы допустили ошибки ε_k, для которых нам известны лишь оценки $|\varepsilon_k| \le \varepsilon$. Тогда вместо интерполяционного полинома $Q_n(f; x)$ мы получим

$$\overline{Q_n(f; x)} = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \big(f(x_k) + \varepsilon_k \big),$$

так что

$$|Q_n(f; x) - \overline{Q_n(f; x)}| = \left| \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \varepsilon_k \right| \le \lambda_{n+1}(x) \varepsilon$$

и $\|Q_n f - \overline{Q_n f}\| \le \lambda_{n+1}\varepsilon$. Обе эти оценки являются точными в том смысле, что если при всех k $|\varepsilon_k| = \varepsilon$ и ε_k имеют соответствующим образом выбранные знаки, то это неравенства обращаются в равенства.

Простейшими узлами являются равноотстоящие: $x_k = a + kh$, где $h = (b-a)/n$, а $k = 0, \ldots, n$. Покажем, что эти узлы являются плохими в том отношении, что для них постоянная Лебега растет чрезвычайно быстро с ростом n.

Теорема 5. Для постоянной Лебега равноотстоящих узлов выполняется неравенство

$$\lambda_{n+1} > \frac{1}{3n}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Доказательство. Имеем $\lambda_{n+1} \ge \lambda_{n+1}(x^*)$, где $x^* = a+h/2$. Легко видеть, что

$$|l_k(x^*)| = \frac{(2n-1)!!}{2^n k!(n-k)!|2k-1|} > \frac{1}{2n}\frac{(2n-1)!!}{2^n k!(n-k)!}.$$

Отсюда

$$\lambda_{n+1} > \frac{1}{2n}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{2n}\frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

Произведя очень грубую оценку:

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdots\frac{2n-1}{n} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

придем к требуемому. ■

Доказанная в теореме оценка правильно показывает характер поведения λ_{n+1}, хотя и очень груба, что показывает следующая таблица:

n	оценка	$\lambda_{n+1}(x^*)$
10	1.92	24.6
20	55.4	7391
40	92144	$2.57\cdot10^9$

Быстрый рост постоянной Лебега заставляет предполагать, что равномерная сходимость интерполяционного процесса по равноотстоящим узлам имеет место лишь для узкого класса функций. Действительно, как может быть показано, этот процесс в случае промежутка $[-1, 1]$ не сходится равномерно для функций

$$g_p(x) = \begin{cases} x^p & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

при любом натуральном p, хотя функция g_p $p-1$ раз непрерывно дифференцируема.

Возникает вопрос, а существуют ли узлы, для которых постоянная Лебега существенно меньше, чем для равноотстоящих? Оказывается, что такими узлами являются узлы Чебышева. В случае узлов Чебышева удобнее оценивать не λ_{n+1}, а λ_n, так что узлы — корни полинома Чебышева $T_n(x)$:

$$x_k = \cos\theta_k, \qquad \theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi,$$

а фундаментальные полиномы интерполяции имеют вид:

$$l_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x - x_k)T_n'(x_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поскольку $|T_n'(x_k)| = n/\sin\theta_k$, то при $x = \cos\theta$

$$|l_k(x)| = \frac{|\cos n\theta|}{n|\cos\theta - \cos\theta_k|} \cdot \sin\theta_k.$$

Докажем несколько лемм.

Лемма 1. При $0 \leq \alpha \leq \pi/2$

$$\sin\alpha \geq \frac{2}{\pi}\alpha.$$

Доказательство. Ограничимся указанием, что это неравенство означает, что для промежутка $[0, \pi/2]$ график функции $\sin x$ лежит выше хорды, соединяющей начало координат с вершиной синусоиды. $\blacksquare$

Лемма 2. Если $0 \le x < x + h \le \pi$, то

$$\cos x - \cos(x + h) \ge \frac{2}{\pi^2} h^2.$$

Доказательство. На промежутке $[0, \pi - h]$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = \cos x - \cos(x + h)$. Очевидно, что $\varphi(x) > 0$ и $\varphi''(x) = -\varphi(x) < 0$, так что φ не имеет точек локального минимума. В то же время

$$\varphi(0) = \varphi(\pi - h) = 1 - \cos h = 2 \sin^2 \frac{h}{2} \ge 2 \left(\frac{h}{\pi}\right)^2.$$

Этим лемма доказана. ■

Лемма 3. $|l_k(x)| \le 2$.

Доказательство. Положим $x = \cos\theta$ $(\theta \in [0, \pi])$. Учитывая, что $\cos n\theta_k = 0$ и что при любом τ $|\sin n\tau| \le n |\sin \tau|$, имеем

$$\begin{aligned} |l_k(x)| &= \left| \frac{\cos n\theta - \cos n\theta_k}{n(\cos\theta - \cos\theta_k)} \right| \sin\theta_k = \\ &= \left| \frac{\sin \frac{n}{2}(\theta - \theta_k) \cdot \sin \frac{n}{2}(\theta + \theta_k)}{n \sin \frac{1}{2}(\theta - \theta_k) \cdot \sin \frac{1}{2}(\theta + \theta_k)} \right| \sin\theta_k \le \\ &\le \frac{\sin\theta_k}{\sin \frac{1}{2}(\theta + \theta_k)} \le \frac{\sin\theta_k + \sin\theta}{\sin \frac{1}{2}(\theta + \theta_k)} = 2 \cos \frac{1}{2}(\theta - \theta_k) \le 2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 6. Для постоянной Лебега узлов Чебышева верна оценка

$$\lambda_n \le 8 + \frac{4}{\pi} \ln n.$$

Доказательство. Для произвольной точки $x = \cos\theta \in [-1, 1]$, считая $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$, имеем

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| = \sum_{1}^{m-2} + \sum_{m-1}^{m+2} + \sum_{m+3}^{n} = S_1 + S_2 + S_3.$$

Из леммы 3 сразу же следует, что $S_2 \leq 8$. Суммы S_1 и S_2 оцениваются одинаково. Оценим первую из них.

$$S_1 \leq \frac{1}{n} \sum_{1}^{m-2} \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k - \cos\theta}.$$

Функция $\sin u/(\cos u - \cos\theta)$ при $0 < u < \theta$ возрастает. Поэтому

$$\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k - \cos\theta} \leq \frac{\sin u}{\cos u - \cos\theta} \qquad u \in [\theta_k, \theta_{k+1}].$$

Интегрируя это неравенство по $[\theta_k, \theta_{k+1}]$, имеем

$$S_1 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_{m-1}} \frac{\sin u}{\cos u - \cos\theta} du = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_{m-1} - \cos\theta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \ln \frac{2}{\cos\theta_{m-1} - \cos\theta_m},$$

и по лемме 2 (при $h = \pi/n$)

$$S_1 \leq \frac{1}{\pi} \ln n^2 = \frac{2}{\pi} \ln n.$$

Сумма S_3 допускает такую же оценку, и для завершения доказательства остается сложить полученные оценки для S_1, S_2 и S_3. ■

Полученная оценка правильно отражает характер роста постоянной Лебега для узлов Чебышева, хотя и немного завышена. Для сравнения с таблицей нижних оценок постоянных Лебега для равноотстоящих узлов (см. выше) приведем для того же числа узлов (11, 21, 41) значения постоянных Лебега узлов Чебышева:

$$\lambda_{11} = 2.489, \quad \lambda_{21} = 2.901, \quad \lambda_{41} = 3.327.$$

Из этой теоремы и теоремы Джексона (см. §1) легко получить, что интерполяционный процесс по узлам Чебышева равномерно сходится для всех непрерывно дифференцируемых функций; в действительности такая сходимость имеет место для гораздо более широкого класса функций.

Задача 1. Доказать утверждение, содержащееся в замечании к теореме 3.

Задача 2. Показать, что в случае любых узлов при $n \geq 2$ для функции Лебега выполняется неравенство $\lambda_{n+1}(x) \geq 1$, причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, если x совпадает с одним из узлов.

Задача 3. В тех же условиях показать, что между двумя соседними узлами функция Лебега имеет единственную точку максимума.

Задача 4. Доказать, что при $n \geq 3$ интерполяционный полином по узлам Чебышева на промежутке $[-1, 1]$ приближает функцию $\cos x$ лучше, чем отрезок ряда Тейлора той же степени.

§5 Эрмитовская интерполяция

Пусть на промежутке $[a, b]$ заданы узлы $x_0, \ldots, x_n$. Припишем каждому узлу некоторое натуральное число α_k — кратность узла. Положим $N = \sum \alpha_k - 1$. Пусть для некоторой функции f в каждом узле x_k нам известны значения ее самой и ее производных до порядка $\alpha_k - 1$ включительно. Задача эрмитовской интерполяции состоит в том, что требуется построить полином $P_N \in \mathbb{P}_N$, который при $k = 0, \ldots, n$ удовлетворял бы равенствам

$$P_N^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k) \quad j = 0, \ldots, \alpha_k - 1. \tag{1}$$

Заметим, что число условий, которые мы наложили на P_N, есть $N + 1$, т.е. столько же, сколько у него коэффициентов. Поэтому если искать этот полином с неопределенными коэффициентами, то условия (1) приведут к системе $(N + 1)$ линейных уравнений относительно $(N + 1)$ его коэффициентов.

Докажем однозначную разрешимость поставленной задачи.

Теорема 1. Каковы бы ни были числа b_k^j существует и притом единственный полином $P_N \in \mathbb{P}_N$, для которого выполняются равенства

$$P_N^{(j)}(x_k) = b_k^j \quad k = 0, \ldots, n, \quad j = 0, \ldots, \alpha_k - 1$$

Доказательство. Как уже отмечалось, задача построения такого полинома сводится к решению системы $(N + 1)$ линейных уравнений относительно $(N + 1)$ коэффициентов этого полинома. Требуется доказать, что эта система однозначно разрешима. Пусть $\tilde{P}_N$ — полином, коэффициенты которого удовлетворяют соответствующей однородной системе уравнений. Это означает выполнение равенств $\tilde{P}_N^{(j)}(x_k) = 0$ при $k = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, \alpha_k - 1$, т.е. x_k является корнем полинома $\tilde{P}_N$ кратности α_k, и с учетом кратностей этот полином степени не выше N имеет $(N+1)$ корней. Но тогда он тождественно равен нулю, и равны нулю все его коэффициенты. Итак, наша однородная система уравнений имеет только нулевое решение. ■

Отметим частный случай поставленной задачи, когда имеется всего лишь один узел x_0 кратности α_0. Тогда $N = \alpha_0 - 1$ и, как легко видеть, P_N есть отрезок ряда Тейлора функции f:

$$P_N(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^N}{N!} f^{(N)}(x_0).$$

Эрмитовский интерполяционный полином может быть представлен в форме Ньютона. Пусть $y_0, \ldots, y_N$ — некоторая перестановка узлов $x_0, \ldots, x_n$ с повторениями, в которой каждый узел x_k встречается столько раз, какова его кратность. Располагая значениями $f^{(j)}(x_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, \alpha_k - 1$), мы имеем возможность вычислить разделенную разность $f(y_0, \ldots, y_N)$. Строго говоря, когда вводились разделенные разности с кратными узлами, требовалось, чтобы производная $f^{(\alpha_k - 1)}$ была непрерывна по меньшей мере в окрестности точки x_k, а сейчас мы знаем только существование этой производной в самой точке x_k. Более того, если мы решаем интерполяционную задачу в постановке теоремы 1, то никакой функции f у нас вообще нет, хотя если считать b_k^j значением $f^{(j)}(x_k)$, где f обладает непрерывными нужными производными, то $f(y_0, \ldots, y_N)$ мы можем вычислить. Чтобы разрешить эту коллизию, мы будем считать, что $f(y_0, \ldots, y_N)$ есть разделенная разность эрмитовского интерполяционного полинома, существование которого доказано в теореме 1. Для него выполняется равенство $P_N(y_0, \ldots, y_N) = f(y_0, \ldots, y_N)$, если только f достаточно гладкая функция, для которой $f^{(j)}(x_k) = b_k^j$. Так можно понимать $f(y_0, \ldots, y_N)$ (и разделенные разности низших порядков) в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $y_0, y_1, \ldots, y_N$ — произвольная перестановка узлов $x_0, \ldots, x_n$ с повторениями, в которой каждый узел x_k встречается столько раз, какова его кратность. Тогда эрмитовский интерполяционный полином имеет представление

$$P_N(x) = f(y_0) + (x - y_0)f(y_0, y_1) + \cdots + (x - y_0)\ldots(x - y_{N-1})f(y_0, \ldots, y_N).$$

Доказательство. Покажем, что выписанный полином P_N удовлетворяет интерполяционным условиям. Заметим, что если $y_0, \ldots, y_N$ различные узлы и $z_0, \ldots, z_N$ их произвольная перестановка, то выполняется равенство

$$\begin{aligned} & f(y_0) + (x - y_0)f(y_0, y_1) + \cdots + (x - y_0)\ldots(x - y_{N-1})f(y_0, \ldots, y_N) = \\ & \quad = f(z_0) + (x - z_0)f(z_0, z_1) + \cdots + (x - z_0)\ldots(x - z_{N-1})f(z_0, \ldots, z_N), \end{aligned}$$

так как левая и правая части совпадают как интерполяционные полиномы функции f, построенные по одной и той же системе узлов. Поскольку разделенные разности суть непрерывные функции своих аргументов, то это же равенство соблюдается и при наличии кратных узлов. Поэтому при доказательстве равенства $P_N^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k)$ мы вправе считать, что $y_0 = \cdots = y_{\alpha_k - 1} = x_k$. Тогда

$$\begin{aligned} P_N(x) &= f(x_k) + (x - x_k)f(x_k, x_k) + \cdots + (x - x_k)^{\alpha_k - 1} f(x_k, \ldots, x_k) + R(x) = \\ &= f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) + \cdots + \frac{(x - x_k)^{\alpha_k - 1}}{(\alpha_k - 1)!} f^{(\alpha_k - 1)}(x_k) + R(x), \end{aligned}$$

где $R(x)$ — полином, содержащий множитель $(x - x_k)^{\alpha_k}$. Отсюда видно, что действительно при $j \le \alpha_k - 1$ будет $P_N^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k)$. ■

Погрешность эрмитовской интерполяции можно оценивать, используя следующую теорему.

Теорема 3. Пусть функция f $N + 1$ раз непрерывно дифференцируема на некотором промежутке $[a, b]$, содержащем все узлы и точку интерполяции x. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$f(x) - P_N(x) = \frac{\Omega(x)}{(N + 1)!} f^{(N+1)}(\xi).$$

Здесь $\Omega(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} \dots (x - x_n)^{\alpha_n}$ — полином степени $N + 1$.

Доказательство. Используя свойство $\langle 5 \rangle$ разделенных разностей, которое, как уже отмечалось, верно и в случае наличия кратных узлов, для узлов $y_0, \dots, y_N, x$ (узлы y_j те же, что в теореме 2), имеем

$$f(x) = P_N(x) + \Omega(x) f(y_0, \dots, y_N, x),$$

и остается воспользоваться свойством $\langle 6 \rangle$ разделенных разностей. ■

Задача 1. Показать однозначную разрешимость следующей интерполяционной задачи: $P_3(x_k) = a_k$, $P_3''(x_k) = b_k$ $(k = 0, 1)$.

Задача 2. Показать, что интерполяционная задача $P_2(-1) = a$, $P_2'(0) = b$, $P_2(1) = c$, вообще говоря, неразрешима и найти условие ее разрешимости, наложенное на числа a, b, c.

§6 Численное дифференцирование

Численное дифференцирование— это приближенное вычисление производных функции, заданной таблично.

Пусть нам известны значения функции f в узлах x_j, лежащих на промежутке $[a, b]$. Требуется найти значение производной этой функции $f^{(k)}(x)$ в некоторой точке x, которая может и совпадать с каким-нибудь из узлов. Способ решения — по узлам, в которых известно значение функции, (или части из них) строится интерполяционный полином, и за приближенное значение производной в точке x принимается значение в этой точке производной интерполяционного полинома. Если для интерполяции были выбраны узлы $x_0, \dots, x_n$ и P_n — соответствующий интерполяционный многочлен, то формула численного дифференцирования:

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x)$$

Займемся оценкой погрешности этой формулы.

Теорема. Пусть функция f $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на промежутке $[a, b]$, содержащем узлы интерполяции и точку x, в которой вычисляется производная. Пусть $k \leq n$ и пусть выполняется одно из условий: а) $x \notin (c, d)$, где $c = \min x_j$, $d = \max x_j$, б) $k = 1$ и x совпадает с одним из узлов x_j. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) = \omega^{(k)}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Доказательство. Ввиду а) или б) $\omega^{(k)}(x) \neq 0$. Положим $A = [f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)]/\omega^{(k)}(x)$ и определим функцию $\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - A\omega(z)$. Узлы x_j $(j = 0, \dots, n)$ являются корнями этой функции, так что на $[c, d]$ она имеет $(n+1)$ различных корней. По теореме Ролля $\varphi^{(k)}$ имеет на (c, d) $n + 1 - k$ корней, не совпадающих с точкой x. Последнее следует из того, что в случае а) $x \notin (c, d)$, а в случае б) — из того, что по теореме Ролля существует корень первой производной функции, лежащий строго между корнями самой этой функции. Итак, точка x есть корень $\varphi^{(k)}$, отличный от сосчитанных ранее $n + 1 - k$ корней, так что на $[a, b]$ $\varphi^{(k)}$ имеет не менее $n + 2 - k$ корней. Продолжая применять теорему Ролля, получим, что $\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - A(n+1)!$ имеет на (a, b) хотя бы один корень ξ. Остается приравнять $\varphi^{(n+1)}(\xi)$ нулю. ■

Построим некоторые конкретные формулы численного дифференцирования в случае равноотстоящих узлов и точки дифференцирования, совпадающей с одним из узлов. При этом естественно использовать интерполяционные формулы с конечными разностями, построенные в §3. В этих формулах делалась замена переменной $x = x_0 + th$ (или $x = x_n + th$) и следует иметь в виду, что $\frac{d}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}$.

Дифференцируя формулу Ньютона для начала таблицы, имеем

$$P'(x) = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}P(x_0 + th) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 f_0 + \dots\right].$$

Полагая в этой формуле $t = 0$, сохраняя в квадратных скобках лишь одно или два слагаемых и используя для остаточно члена R доказанную теорему, имеем для $f'(x_0)$ следующие формулы:

$$\begin{aligned} f'(x_0) =& \frac{1}{h}\Delta f_0 + R = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi), \\ f'(x_0) =& \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right] + R = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + \frac{h^2}{3}f'''(\xi). \end{aligned} \tag{1}$$

Точно так же, дифференцируя формулу Ньютона для конца таблицы, можно получить:

$$f'(x_n) = \frac{f_n - f_{n-1}}{h} + \frac{h}{2}f''(\xi), \quad f'(x_n) = \frac{3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2}}{2h} + \frac{h^2}{3}f'''(\xi).$$

Дифференцирование формулы Ньютона - Гаусса дает:

$$P'(x) = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}P_(x_0 + th) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 f_{-1} + \dots\right],$$

$$P''(x) = \frac{1}{h^2}\frac{d^2}{dt^2}P(x_0 + th) = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f_{-1} + \dots].$$

Сохраняя в квадратных скобках выписанные члены и используя в случае первой производной теорему о представлении остаточного члена, имеем

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_{-1}\right] + R = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi), \tag{2}$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_{-1} + R = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + R. \tag{3}$$

Интересно сравнить формулу (2) с первой из формул (1). В правых частях той и другой используются два значения функции f, но формула (2) имеет второй порядок точности относительно h, а первая из формул (1) лишь первый.

Условия теоремы об остаточном члене не выполнены в случае формулы (3), и для получения представления остатка в этом случае мы используем другой прием. Предполагая функцию f четырежды непрерывно дифференцируемой, напишем для нее формулы Тейлора, в которых значения всех производных, кроме последних, вычисляются в точке x_0:

$$f_1 = f_0 + hf' + \frac{h^2}{2}f'' + \frac{h^3}{6}f''' + \frac{h^4}{24}f^{IV}(\xi_1),$$

$$f_{-1} = f_0 - hf' + \frac{h^2}{2}f'' - \frac{h^3}{6}f''' + \frac{h^4}{24}f^{IV}(\xi_2).$$

Вычитая из суммы этих разложений $2f_0$ и поделив на h^2, придем к равенству

$$\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} = f''(x_0) + \frac{h^2}{24}[f^{(IV)}(\xi_1) + f^{(IV)}(\xi_2)].$$

Заметив, что между точками ξ_1 и ξ_2 найдется такая точка ξ, что $f^{(IV)}(\xi_1)+f^{(IV)}(\xi_2) = 2f^{(IV)}(\xi)$, окончательно получим:

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(IV)}(\xi). \tag{4}$$

Остановимся теперь на влиянии ошибок, допущенных в значениях функции, на полученные в результате численного дифференцирования результаты на примере формулы (2).

Если для окрестности точки x_0 нам известна оценка $|f'''(x)| \le M$ и известно, что при использовании формулы (2) погрешности в значениях f не превосходят некоторого ε, то суммарная погрешность в значении $f'(x_0)$ оценивается величиной $\varepsilon/h + Mh^2/6$. При малых h влияние ошибок в значениях функции оказывается чрезвычайно большим. Если у нас есть возможность выбора шага h, то целесообразно находить его из условия минимума приведенной оценки погрешности. Таким образом нам следует найти точку минимума функции $\varphi(h) = \varepsilon/h + Mh^2/6$. Приравнивая нулю производную этой функции, легко находим эту точку и оценку E погрешности при таком выборе шага:

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}, \qquad E = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M\varepsilon^2}.$$

Заметим, что принципиально невозможно получить значение производной с погрешностью того же порядка, что в значениях функции.

Задача 1. Дифференцированием линейного интерполяционного полинома легко получается формула

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + R(f;x). \tag{5}$$

Получить в случае $f \in C^{(2)}$ представление остатка $R(f;x)$:

$$R(f;x) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} K(x,t)f''(t)dt, \quad K(x,t) = \begin{cases} t - x_0 & \text{при } t < x, \\ t - x_0 - h & \text{при } t > x. \end{cases}$$

Задача 2. Показать, что при $x_0 < x < x_0 + h$ найдется такая функция $f \in C^{(2)}$, для которой не существует такой точки $\xi \in (x_0, x_0+h)$, что в формуле (5)

$$R(f;x) = \frac{\omega'(x)}{2!} f''(\xi), \quad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h).$$

Задача 3. Определить наилучший шаг h в формуле (4) при наличии ошибок округления в значениях функции.

§7 Тригонометрическая интерполяция. Дискретное преобразование Фурье.

Периодические функции естественно приближать периодическими. Простейшими 2π-периодическими функциями являются тригонометрические полиномы:

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Если хоть один из коэффициентов a_n или b_n отличен от нуля, то n называется порядком полинома T_n. Множество тригонометрических полиномов порядка не выше n обозначим через $\mathbb{T}_n$. Основные свойства тригонометрических полиномов:

1) Если $T_n, U_n \in \mathbb{T}_n$, то и $\alpha T_n + \beta U_n \in \mathbb{T}_n$ (линейность);

2) выражения для коэффициентов ($k = 1, 2, \dots$):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)dx, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos kx\, dx, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\sin kx\, dx;$$

3) если $T_n \in \mathbb{T}_n$ есть четная функция, то все $b_k = 0$, а если нечетная, то все $a_k = 0$.

Если T_n имеет корень x^*, то он имеет бесконечно много корней, таковыми являются $x^* + 2j\pi$. Такие корни называются эквивалентными.

Теорема 1. Отличный от тождественного нуля $T_n \in \mathbb{T}_n$ имеет не более $2n$ попарно неэквивалентных корней.

Доказательство. Используя формулы Эйлера

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

приведем T_n к виду

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} d_k e^{ikx} = e^{-inx}P_{2n}(z),$$

где c_k и $d_k = c_{k-n}$ — комплексные, вообще говоря, коэффициенты, $P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} d_k z^k$ — полином степени не выше $2n$ и $z = e^{ix}$. Если x_0 — корень T_n, то $z_0 = e^{ix_0}$ — корень P_{2n}, если x_0 и x_1 — неэквивалентные корни T_n, то z_0 и z_1 — различные корни P_{2n}, так что P_{2n} имеет не менее различных корней, чем T_n попарно неэквивалентных. Но P_{2n} имеет не более $2n$ различных корней. ■

Следствие 1. Система функций $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$ чебышевская на любом промежутке $[a, b]$, если только $b < a + 2\pi$.

Следствие 2. Каковы бы ни были точки $x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < x_0 + 2\pi$ и числа $f_0, \dots, f_{2n}$ существует и притом единственный $T_n \in \mathbb{T}_n$, такой что $T_n(x_k) = f_k$ при $k = 0, \dots, 2n$.

При приближении периодической функции с помощью интерполяции тригонометрическим полиномом на периоде естественно выбрать равноотстоящие узлы, причем их число должно быть нечетно, так что $x_j = jh$ $(j = 0, \dots, 2n)$, $h = 2\pi/(2n+1)$. В этом случае удается получить явное выражение коэффициентов интерполяционного полинома через значения в узлах интерполируемой функции.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\sigma_m = \sum_{j=0}^{2n} e^{imx_j} = \begin{cases} 2n+1 & \text{при } m = 0 \\ 0 & \text{при } m = 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Доказательство. При $m = 0$ равенство очевидно. Если $1 \le m \le 2n$, то $\sigma_m = 1 + q + \dots + q^{2n}$, где $q = e^{imh} \ne 1$, и потому $\sigma_m = (1 - q^{2n+1})/(1 - q) = 0$, так как $q^{2n+1} = e^{2m\pi i} = 1$. ■

Следствие . Справедливы равенства

$$C_m = \sum_{j=0}^{2n} \cos mx_j = \begin{cases} 2n+1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m = 1, \dots, 2n, \end{cases}$$

$$S_m = \sum_{j=0}^{2n} \sin mx_j = 0, \quad m = 0, \dots, 2n.$$

Доказательство. Достаточно приравнять вещественную и мнимую части в равенстве, указанном в лемме 1. ■

Лемма 2. Пусть $0 \le k, l \le n$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos kx_j \cos lx_j = \begin{cases} 2n+1 & \text{при } k = l = 0, \\ (2n+1)/2 & \text{при } k = l \ne 0, \\ 0 & \text{при } k \ne l, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \sin kx_j \sin lx_j = \begin{cases} (2n+1)/2 & \text{при } k = l \ne 0, \\ 0 & \text{при } k \ne l \text{ или } k = l = 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos kx_j \sin lx_j = 0.$$

Доказательство. Считая для определенности $k \ge l$ и используя формулу

$$\cos kx_j \cos lx_j = \frac{1}{2}[\cos(k+l)x_j + \cos(k-l)x_j],$$

имеем

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos kx_j \cos lx_j = \frac{1}{2}[C_{k+l} + C_{k-l}].$$

Совершенно аналогично

$$\sum_{j=0}^{2n} \sin kx_j \sin lx_j = \frac{1}{2}[C_{k-l} - C_{k+l}],$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos kx_j \sin lx_j = \frac{1}{2}[S_{k+l} \pm S_{|k-l|}].$$

Из этих равенств и следствия из леммы 1 легко следуют доказываемые. ■

Теорема 2. Коэффициенты полинома $T_n \in \mathbb{T}_n$, решающего интерполяционную задачу

$$T_n(x_j) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_j + b_k \sin kx_j) = f_j, \quad j = 0, \ldots, 2n, \tag{1}$$

даются формулами ($k = 1, \ldots, n$)

$$a_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j, \qquad a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j \cos kx_j,$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j \sin kx_j. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточно умножить равенства (1) на $\cos lx_j$ или $\sin lx_j$, просуммировать по j от 0 до $2n$ и воспользоваться леммой 2. ■

На формулы (1) и (2) возможна несколько другая точка зрения. Пусть $F = (f_0, \ldots, f_{2n})$ произвольный вектор. Его компоненты можно рассматривать как значения в узлах x_j некоторой функции, и по формулам (2) поставить ему в соответствие вектор $A = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$. Компоненты вектора F восстанавливаются по компонентам вектора A согласно формулам (1). Вектор A называют *дискретным преобразованием Фурье* вектора F. Процесс построения A можно рассматривать как переразложение вектора F по новому базису в пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$, компоненты нового базисного вектора являются значениями в узлах функции $\cos kx$ или $\sin kx$. Существо доказанной выше леммы 2 состоит в том, что этот базис является ортогональным.

В вычислительной практике при работе с некоторым вектором часто оказывается удобнее иметь дело с его дискретным преобразованием Фурье, и это преобразование находит широкое применение.

Например, пусть требуется передать по каналу связи $2n + 1$ число $f_0, \ldots, f_{2n}$. Эти числа можно рассматривать как значения в точках x_j тригонометрического полинома: $f_j = T_n(x_j)$. Коэффициенты этого полинома вычисляются по формулам (2), и иногда именно эти коэффиуциенты оказывается целесообразным передавать по каналу связи вместо чисел f_j (например, среди коэффициентов много очень маленьких, и их можно заменить нулями). Восстановление чисел f_j на другом конце канала связи по полученным коэффициентам также нетрудно.

Существуют и другие преобразования векторов, также называемые дискретным преобразованием Фурье. Остановимся на одном таком преобразовании векторов с комплексными компонентами. Для $y \in \mathbb{C}^N$ условимся писать $y = (y_0, \ldots, y_{N-1})$. В пространстве $\mathbb{C}^N$ таких векторов скалярное произведение задается формулой $(y, z) = \sum_{k=0}^{N} y_k \overline{z}_k$. Положим $h = 1/N$ и рассмотрим в $\mathbb{C}^N$ систему векторов

$$e_k = (1, e^{2\pi i(kh)}, e^{2\pi i(2kh)}, \ldots, e^{2\pi i(N-1)kh}) \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Эти векторы оказываются ортогональными:

$$(e_k, e_j) = N\delta_{kj},$$

(доказательство по существу совпадает с доказательством леммы 1) и потому образуют базис в $\mathbb{C}^N$, так что любой вектор y может быть разложен по этому базису:

$$y = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e_j \quad \left(y_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{2\pi i(kjh)} \right).$$

Ввиду ортогональности базиса e_k коэффициенты a_j легко находятся:

$$a_j = \frac{(y, e_j)}{(e_j, e_j)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i(kjh)},$$

что можно переписать еще в виде

$$a_{N-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{2\pi i(kjh)}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Вектор $(a_0, \ldots, a_{N-1})$ называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) вектора y.

Вычисление преобразования Фурье вектора y и восстановление этого вектора по его преобразованию Фурье (нахождение компонент y_k) осуществляется по одинаковым (с точностью до множителя $1/N$) формулам и требует вычисления сумм вида

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{2\pi i \frac{kj}{N}}.$$

Если мы располагаем таблицей соответствующих степеней $e^{2\pi i \frac{l}{N}}$, то прямое вычисление всех y_k требует произвести N^2 умножений. Число арифметических действий можно существенно сократить, если N есть произведение нескольких множителей. Ограничимся случаем, когда $N = 2^n$. Тогда полагая $N_1 = N/2 = 2^{n-1}$ и $z = e^{2\pi i/N}$, имеем

$$y_k = \sum_{m=0}^{N_1-1} a_{2m} z^{2mk} + \sum_{m=0}^{N_1-1} a_{2m+1} z^{(2m+1)k} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N_1-1} a'_m z_1^{mk} + z^k \sum_{m=0}^{N_1-1} a''_m z_1^{mk} = y'_k + z^k y''_k.$$

Здесь $z_1 = z^2 = e^{2\pi i/N_1}$, $a'_m = a_{2m}$, $a''_m = a_{2m+1}$. Из равенства $z^{kN} = 1$ вытекает, что $y'_{N_1+k} = y'_k$ и $y''_{N_1+k} = y''_k$, так что реально требуется вычислить лишь компоненты векторов $y' = (y'_0, \ldots, y'_{N_1-1})$ и $y'' = (y''_0, \ldots, y''_{N_1-1})$. Из приведенных выше формул видно, что y' и y'' суть дискретные преобразования Фурье для $(a'_0, \ldots, a'_{N_1-1})$ и $(a''_0, \ldots, a''_{N_1-1})$ соответственно, и их можно вычислять пользуясь тем же приемом. Обозначим через q_n число умножений, которое потребно при применении такого процесса для вычисления ДПФ вектора размерности $N = 2^n$. Тогда $q_n = 2q_{n-1} + 2^n$. При $n = 0$ ($N = 1$) ДПФ "вектора" есть он сам, так что $q_0 = 0$. Это позволяет методом индукции легко доказать, что $q_n = nN = N \log_2 N$, так что число умножений по сравнению с применением прямых формул существенно сокращается. Например, при $N = 2^{10} = 1024$ будет $N^2 > 10^6$,а $Nn = 10240$, т.е. более чем в 100 раз меньше. Вычисление ДПФ с использованием приведенного приема называется быстрым преобразованием Фурье — БПФ.

Поясним формулы БПФ на примере $N = 4$. Тогда $z = e^{2\pi i/4} = i$, $z_1 = z^2 = -1$. Требуется вычислить коэффициенты разложения вектора $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ по новому базису:

$$\begin{gathered}
y_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\
y_1 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3, \\
y_2 = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6, \\
y_3 = a_0 + a_1 z^3 + a_2 z^6 + a_3 z^9.
\end{gathered}$$

Тогда формулы БПФ принимают вид:

$$\left.\begin{gathered}
y_0 = (a_0 + a_2) + 1 \cdot (a_1 + a_3) = y_0' + y_0'', \\
y_1 = (a_0 + a_2 z_1) + z(a_1 + a_3 z_1) = y_1' + z y_1'', \\
y_2 = (a_0 + a_2) + z^2(a_1 + a_3) = y_0' + z^2 y_0'', \\
y_3 = (a_0 + a_2 z_1) + z^3(a_1 + a_3 z_1) = y_1' + z^3 y_1''.
\end{gathered}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{matrix}
y_0' = a_0 + a_2, & y_0'' = a_1 + a_3, \\
y_1' = a_0 + a_2 z_1, & y_1'' = a_1 + a_3 z_1.
\end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

При вычислениях сначала используются формулы (4), а затем (3).

Задача. Показать, что система функций $\sin x, \ldots, \sin nx$ является чебышевской на промежутке $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$ и не является чебышевской на $[0, \pi - \varepsilon]$ и $[\varepsilon, \pi]$.