Глава 3
Решение задач линейной алгебры

§1 Нормы векторов и матриц

Обозначение: $\mathbb{C}^n$ — пространство n-мерных векторов с комплексными компонентами. Естественный базис в $\mathbb{C}^n$ — векторы $e_k = \{\delta_{kj}\}_1^n$. Компоненты векторов x, y будем обычно обозначать: $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, их скалярное произведение — $(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta_k}$.

Определение. Заданная на $\mathbb{C}^n$ вещественная функция $\nu(x)$, обозначаемая обычно $\nu(x) = \|x\|$, обладающая свойствами:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (нулевой вектор),

2) для любых $x \in \mathbb{C}^n$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$,

3) для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника),

называется *нормой.*

Сразу же отметим очевидное следствие 3):

4) Для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$ $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

Наиболее употребительными являются следующие нормы, имеющие специальные обозначения[1]:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2} = \sqrt{(x,x)} \ \text{ – евклидова норма, длина вектора,}$$

$$\|x\|_\infty = \max |\xi_k|,$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|.$$

[1]Эти обозначения связаны с тем, что перечисляемые ниже нормы являются частными случаями *норм Гельдера*: $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p\right)^{1/p}$ $(p \geq 1)$.

Проверка аксиом 1)-3) для этих норм элементарна.

В силу неравенства Коши - Буняковского $|(x,y)| \le \|x\|_2 \|y\|_2$. Кроме того, очевидно неравенство $|(x,y)| \le \|x\|_1 \|y\|_\infty$.

Приведем еще один важный пример нормы. Пусть φ_k $(k = 1,\dots,n)$ комплекснозначные непрерывные на $[a,b]$ линейно независимые функции. Тогда

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k \right\|_C = \max_{t\in[a,b]} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right|$$

есть норма в $\mathbb{C}^n$. Доказательство очевидно.

Теорема 1 (об эквивалентности норм). Все нормы в $\mathbb{C}^n$ эквивалентны. Это значит, что для любых двух норм $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ найдутся такие постоянные c' и c'', что для всех $x \in \mathbb{C}^n$ выполняются неравенства

$$\|x\|' \le c'\|x\|'', \quad \|x\|'' \le c''\|x\|'.$$

Доказательство. Можно считать, что одна из норм есть $\|\cdot\|_2$, а другая $\|\cdot\|$ произвольна. Тогда

$$\|x\| = \left\| \sum \xi_k e_k \right\| \le \sum |\xi_k|\, \|e_k\| \le c'\|x\|_2, \quad c' = \sqrt{\sum \|e_k\|^2}.$$

В частности, $\big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x-y\| \le c'\|x-y\|_2$, так что $\|\cdot\|$ — непрерывная функция. На сфере $S = \{\, x \mid \|x\|_2 = 1 \,\}$ она достигает своего минимального значения, отличного от нуля, т.к. на S в нуль не обращается: $\min_{x\in S} \|x\| = m > 0$. Для любого $x \ne 0$ положим $y = x/\|x\|_2$; тогда $\|x\| = \|x\|_2\, \|y\| \ge m\|x\|_2$, так что для любого x $\|x\|_2 \le \frac{1}{m}\|x\|$. ■

Если использовать приведенный выше пример нормы, то из теоремы 1 немедленно получим

Следствие. При заданных n и $[a,b]$ найдется такая постоянная $m > 0$, что для любого полинома $P_n \in \mathbb{P}_n$: $P_n(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ выполняется неравенство $\|P_n\|_{C[a,b]} \ge m\sqrt{\sum a_k^2}$.

Это следствие формулировалось в §1 главы 1 в виде леммы.

Пусть даны последовательность векторов $x_s = (\xi_1^s, \ldots, \xi_n^s)$ и вектор x.

Теорема 2. Эквивалентны утверждения:

А. При всех k $\xi_k^s \to \xi_k$,

Б. $\|x_s - x\| \to 0$,

В. для всех $y \in \mathbb{C}^n$ $(x_s, y) \to (x, y)$.

Доказательство. Если Б. выполняется для какой-то одной нормы, то в силу теоремы 1 и для всех остальных.

1) А⇒Б. Очевидно, если $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

2) Б⇒В. $|(x_s, y) - (x, y)| \le \|x_s - x\|_2 \|y\|_2$.

3) В⇒А. Достаточно взять $y = e_k$. ■

Если выполнено хоть одно из требований А-В (а значит, и два другие), то говорят, что последовательность x_s сходится к x $(x_s \to x)$.

Множество (комплексных) квадратных матриц порядка n обозначим $\mathbb{M}_n$. Элементы матрицы A будем обозначать a_{kj}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичную матрицу будем обозначать E. Заданная на $\mathbb{M}_n$ вещественная функция $\|A\|$ называется *нормой*, если она удовлетворяет требованиям:

1) $\|A\| \ge 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$,

3) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$.

Как и для векторов, из 3) следует

4) $\big|\|A\| - \|B\|\big| \le \|A - B\|$.

Таким образом, норму в $\mathbb{M}_n$ можно рассматривать как норму в $\mathbb{C}^{n^2}$. Поэтому в силу теоремы 1 все нормы в $\mathbb{M}_n$ эквивалентны.

Определение. Пусть $\|\cdot\|$ некоторая норма в $\mathbb{C}^n$. Матричная норма

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{1}$$

называется *операторной* нормой, порожденной соответствующей векторной.

То, что определяемая формулой (1) функция действительно есть норма, проверяется элементарно. Если $\|\cdot\|$ — операторная норма, то помимо 1)-4) она обладает еще легко проверяемыми свойствами:

5) для всех векторов x $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$ и существует такой вектор x_0, что $\|x_0\| = 1$, $\|Ax_0\| = \|A\|$,

6) $\|E\| = 1$,

7) $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$,

8) для любого собственного числа матрицы A $|\lambda| \le \|A\|$.

Рассмотрим последовательность матриц

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{11}^s & \dots & a_{1n}^s \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^s & \dots & a_{nn}^s \end{pmatrix}$$

и матрицу A.

Теорема 3. Эквивалентны утверждения:

А. при всех k, j $a_{kj}^s \to a_{kj}$,

Б. $\|A_s - A\| \to 0$,

В. для всех x $A_s x \to Ax$,

Г. для всех x и y $(A_s x, y) \to (Ax, y)$.

Доказательство. Как и в теореме 2, норма в Б произвольна.

А⇔Б — из теоремы 2.

Б⇒В. Для операторной нормы $\|A_s x - Ax\| \le \|A_s - A\|\,\|x\|$.

В⇒Г. $\big|(A_s x, y) - (Ax, y)\big| \le \|A_s x - Ax\|_2 \|y\|_2$,

Г⇒А. Достаточно рассмотреть $x = e_j$, $y = e_k$. ■

Определение сходимости последовательности матриц дается так же, как для векторов.

Операторные нормы матрицы, порожденные введенными выше векторными $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$, помечаются теми же значками.

Теорема 4. Справедливы равенства:

$$\|A\|_\infty = \max_k \sum_j |a_{kj}|, \tag{2}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_k |a_{kj}|, \tag{3}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\Lambda}, \tag{4}$$

где Λ — максимальное собственное число матрицы[2] A^*A.

Доказательство. 1) Обозначим правую часть (2) $\varkappa$ и положим $y = Ax$. Тогда

$$|\eta_k| = \left|\sum_j a_{kj}\xi_j\right| \le \varkappa \|x\|_\infty,$$

так что $\|Ax\|_\infty = \|y\|_\infty \le \varkappa\|x\|_\infty$ и $\|A\|_\infty \le \varkappa$. Пусть $\varkappa = \sum_j |a_{k_0 j}|$. Положим $\xi_j = \operatorname{sign} a_{k_0 j}$, $y = Ax$. Тогда $\|x\|_\infty = 1$, $\eta_{k_0} = \varkappa$, $\|Ax\|_\infty = \|y\|_\infty \ge \varkappa$ и потому $\|A\|_\infty \ge \varkappa$.

2) Пусть $\varkappa$ — правая часть (3), $Ax = y$.

$$\|y\|_1 = \sum_k \left|\sum_j a_{kj}\xi_j\right| \le \sum_j |\xi_j| \sum_k |a_{kj}| \le \varkappa \|x\|_1$$

и $\|A\|_1 \le \varkappa$. Пусть $\varkappa = \sum_k |a_{kj_0}|$. Тогда для вектора $x = e_{j_0}$ имеем $\|x\|_1 = 1$, $\|Ax\|_1 = \varkappa$, и $\|A\|_1 \ge \varkappa$.

3) Матрица A^*A эрмитова. Все ее собственные числа вещественны, неотрицательны, и она имеет полную ортогональную систему собственных векторов. Пусть $\Lambda_1 \ge \Lambda_2 \ge \cdots \ge \Lambda_n$ ($\Lambda = \Lambda_1$) все ее собственные числа и $z_1, \ldots, z_n$ — соответствующие собственные векторы, такие что $(z_k, z_j) = \delta_{kj}$. Произвольный вектор x разложим по этим векторам: $x = \sum \alpha_k z_k$. Тогда $\|x\|_2^2 = (x, x) = \sum |\alpha_k|^2$ и

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (x, A^*Ax) = \sum \Lambda_k |\alpha_k|^2 \le \Lambda \|x\|_2^2.$$

Так что $\|A\|_2 \le \sqrt{\Lambda}$. В то же время $\|Az_1\|_2^2 = (Az_1, Az_1) = \Lambda(z_1, z_1) = \Lambda\|z_1\|_2^2$ и $\|A\|_2 \ge \sqrt{\Lambda}$. ■

---

[2] Корни из собственных чисел матрицы A^*A называются *сингулярными числами* матрицы A.

Следствие. Если матрица A эрмитова, то $\|A\|_2 = \max|\lambda_k|$, где λ_k — собственные числа самой матрицы A.

Доказательство. В эрмитовом случае $A^*A = A^2$, и собственные числа этой матрицы суть квадраты собственных чисел матрицы A. ■

Теорема 5. Для $\|A\|_2$ справедливы оценки:

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\sum_k \sum_j |a_{kj}|^2}, \quad \|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1}.$$

Доказательство. 1) Для $y = Ax$ имеем

$$\|y\|_2^2 = \sum_k \left| \sum_j a_{kj}\xi_j \right|^2 \le \sum_k \left(\sum_j |a_{kj}|^2 \right) \left(\sum_j |\xi_j|^2 \right) =$$
$$= \|x\|_2^2 \sum_k \sum_j |a_{kj}|^2.$$

2) $\|A\|_2^2 = \Lambda \le \|A^*A\|_1 \le \|A\|_1 \|A^*\|_1 = \|A\|_1 \|A\|_\infty$. ■

Задача 1. Доказать, что для норм Гельдера при $q \to \infty$ выполняется соотношение

$$\|x\|_q = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^q \right)^{1/q} \to \|x\|_\infty.$$

Задача 2. Пусть B неособенная матрица и $\|.\|$ — векторная норма. Положим $\|x\|' = \|Bx\|$. Показать, что $\|\cdot\|'$ также норма, и найти выражение для порожденной этой нормой операторной матричной.

Задача 3. Для p и q, принимающих независимо друг от друга значения 1, 2, ∞, найти

$$\sup_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q}, \qquad \sup_{A \in \mathbb{M}_n} \frac{\|A\|_p}{\|A\|_q}.$$

Обратить внимание на зависимость этих величин от n.

§2 Матричная геометрическая прогрессия и некоторые оценки

В этом §, если не оговорено противное, мы всегда считаем, что задана произвольная векторная норма, а норма матрицы — всегда порожденная этой векторной операторная норма.

Пусть $A \in \mathbb{M}_n$ — некоторая матрица. Матричная геометрическая прогрессия — последовательность A^s. Вопрос: когда $A^s \to 0$?

Лемма 1. Если $|\lambda| < 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, то $C_s^\nu \lambda^{s-\nu} \to 0$ при $s \to \infty$.

Доказательство следует из того, что $C_s^\nu \leq s^\nu$. ■

Лемма 2. Пусть

$$D_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n. \qquad (1)$$

Если $|\lambda| < 1$, то $D_n^s \to 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что при всех k $D_n^s e_k \to 0$. Введем обозначение: $e_k = 0$ при $k \leq 0$. Тогда $D_n e_k = \lambda e_k + e_{k-1}$ и методом индукции легко показывается, что

$$D_n^s e_k = \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu \lambda^{s-\nu} e_{k-\nu}.$$

При $s > k-1$

$$D_n^s e_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} C_s^\nu \lambda^{s-\nu} e_{k-\nu}.$$

Используя лемму 1, получаем требуемое. ■

Определение. Спектральным радиусом матрицы A (обозначение $\rho(A)$) называется максимальный из модулей ее собственных чисел.

Теорема 1. Для того чтобы $A^s \to 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенства $\rho(A) < 1$.

Доказательство. 1) Необходимость. От противного. Пусть матрица A имеет такое собственное число, что $|\lambda| \geq 1$ и пусть z — соответствующий собственный вектор. Тогда $\|A^s z\| = |\lambda|^s \|z\| \nrightarrow 0$ и $A^s \nrightarrow 0$.

2) Достаточность легко показывается, если A имеет полную систему собственных векторов, но предполагать это мы не будем и воспользуемся для A канонической формой Жордана: $A = BDB^{-1}$, где

$$D = \begin{pmatrix} D_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{n_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & D_{n_l} \end{pmatrix},$$

D_{n_j} — матрицы вида (1) с собственными числами λ_j матрицы A на главной диагонали. Тогда $A^s = BD^sB^{-1}$, причем

$$D^s = \begin{pmatrix} D^s_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D^s_{n_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & D^s_{n_l} \end{pmatrix},$$

и в случае $\rho(A) < 1$ $D^s \to 0$. ■

Рассмотрим теперь сумму членов матричной геометрической прогрессии (ряд)

$$E + A + A^2 + A^3 + \dots . \tag{2}$$

Теорема 2. Для того чтобы ряд (2) сходился, необходимо и достаточно $\rho(A) < 1$. В случае сходимости его сумма $S = (E - A)^{-1}$.

Доказательство. Необходимость следует из того, что общий член сходящегося ряда обязан стремиться к нулю, и теоремы 1.

Достаточность. Пусть S_m — частная сумма ряда. Тогда $(E - A)S_m = E - A^{m+1}$. Т.к. 1 не есть собственное число матрицы A ($\rho(A) < 1$), то существует $(E - A)^{-1}$ и $S_m = (E - A)^{-1}(E - A^{m+1})$. Остается перейти к пределу при $m \to \infty$. ■

Следствие. Если $\|A\| < 1$[3], то ряд (2) сходится, матрица $E - A$ неособенная и

$$\|(E - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{3}$$

[3] Напомним, что $\|A\|$ — операторная норма.

Доказательство требуется лишь для (3):

$$\|S_m\| \le 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \dots + \|A\|^m \le \frac{1}{1-\|A\|}. \quad \blacksquare$$

Определение. Говорят, что A матрица с диагональным преобладанием, если при всех k

$$|a_{kk}| > \sum_{j \ne k} |a_{kj}|.$$

Теорема 3 (признак Адамара). Матрица с диагональным преобладанием неособенная.

Доказательство. Диагональные элементы матрицы A отличны от нуля, и она допускает представление $A = D(E+R)$, где

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & a_{2n}/a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\|R\|_\infty < 1$, поэтому матрица $E+R$ обратима и A представлена в виде произведения двух обратимых матриц. $\blacksquare$

Замечание. Так как неособенность матрицы влечет и неособенность транспонированной, то для неособенности матрицы достаточно и “диагонального преобладания в столбцах”.

Определение. Кругами Гершгорина матрицы A называются круги на комплексной плоскости

$$\Lambda_k = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; |\lambda - a_{kk}| \le \sum_{j \ne k} |a_{kj}| \,\}.$$

Теорема 4. Все собственные числа матрицы A содержатся в объединении ее кругов Гершгорина.

Доказательство. Если $\lambda \notin \Lambda_k$, то $|a_{kk} - \lambda| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$, так что если $\lambda \notin \cup\Lambda_k$, то $A - \lambda E$ матрица с диагональным преобладанием и потому неособенная. ■

Замечание. Точно так же все собственные числа содержатся в кругах Гершгорина транспонированной матрицы.

Пусть исходные данные в какой-то задаче вычисления известны нам неточно. Ошибка в решении, вызванная неточностью исходных данных, называется *неустранимой*. Займемся оценкой неустранимой ошибки в задачах обращения матриц и решения систем линейных уравнений.

Теорема 5. Пусть матрица A неособенная и матрица ΔA такова, что $\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| < 1$. Тогда матрица $A + \Delta A$ также неособенная и выполняются оценки

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|},$$

$$\|(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}.$$

Доказательство. По следствию из теоремы 2 матрица $E + A^{-1}\Delta A$ обратима и

$$\|(E + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|\,\|\Delta A\|}.$$

Т.к. $A + \Delta A = A(E + A^{-1}\Delta A)$, то существует $(A + \Delta A)^{-1} = (E + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1}$, откуда сразу же следует первая из доказываемых оценок. Докажем вторую:

$$\begin{aligned}(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1} = [E - A^{-1}(A + \Delta A)](A + \Delta A)^{-1} = \\ = -A^{-1}\Delta A(A + \Delta A)^{-1}\end{aligned}$$

и остается применить первую, уже доказанную, оценку. ■

Обратимся к задаче решения систем линейных уравнений. Пусть x^* — решение системы линейных уравнений

$$Ax = y, \tag{4}$$

а $x^* + \Delta x$ — системы уравнений

$$(A + \Delta A)x = y + \Delta y.$$

Теорема 6. Пусть матрица A обратима и $\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| < 1$[4]. Тогда

$$\|\Delta x\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\big[\|\Delta A\|\,\|x^*\| + \|\Delta y\|\big].$$

Доказательство. Введем еще $x^* + \Delta_1 x$ — решение системы уравнений $Ax = y + \Delta y$. Тогда

$$\Delta_1 x = A^{-1}\Delta y, \quad \|\Delta_1 x\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta y\|,$$

$$\begin{gathered}(A + \Delta A)(x^* + \Delta_1 x) = y + \Delta y + \Delta A(x^* + \Delta_1 x),\\ (A + \Delta A)(\Delta x - \Delta_1 x) = -\Delta A(x^* + \Delta_x).\end{gathered}$$

Используя теорему 5:

$$\begin{aligned}\|\Delta x - \Delta_1 x\| \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}(\|x^*\| + \|\Delta_1 x\|) \le \\ \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}(\|x^*\| + \|A^{-1}\|\,\|\Delta y\|).\end{aligned}$$

Остается, используя полученную оценку для $\|\Delta_1 x\|$, применить неравенство треугольника: $\|\Delta x\| \le \|\Delta x - \Delta_1 x\| + \|\Delta_1 x\|$. ■

Замечание. Для того чтобы избежать в правой части оценки неизвестной нам величины $\|x^*\|$, можно воспользоваться неравенством $\|x^*\| \le \|A^{-1}\|\,\|y\|$.

[4] Заметим, что в силу теоремы 5 тогда и $A + \Delta A$ обратима.

В теоремах 5 и 6 речь шла об *абсолютных* погрешностях. Введем *относительные* погрешности:

$$\delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \ \ \delta y = \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}, \ \ \delta A^{-1} = \frac{\|A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}, \ \ \delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|}.$$

Определение. Пусть A неособенная матрица. *Числом обусловленности матрицы* A называется

$$\mu(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|.$$

Здесь $\|A\|$ — операторная норма матрицы, так что число обусловленности, как и операторная матричная норма, связано с введенной в $\mathbb{C}^n$ векторной нормой. Если последняя помечена каким-нибудь значком, то тем же значком помечается и $\mu(A)$. Например, евклидовой векторной норме соответствует $\mu_2(A)$.

Теорема 7. Пусть A обратимая матрица. Если $\mu(A)\delta A < 1$, то

$$\delta A^{-1} \le \frac{\mu(A)\delta A}{1-\mu(A)\delta A}, \quad \delta x \le \frac{\mu(A)}{1-\mu(A)\delta A}(\delta A + \delta y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mu(A)\delta A = \|A^{-1}\| \, \|\Delta A\|$, то в силу теоремы 5 $A + \Delta A$ обратима. По той же теореме

$$\delta A^{-1} \le \frac{\|A^{-1}\| \, \|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|\Delta A\|} = \frac{\mu(A)\delta A}{1-\mu(A)\delta A}.$$

Перейдем к доказательству второй оценки. По теореме 6 (используя равенство $\|A^{-1}\| \, \|\Delta A\| = \mu(A)\delta A$)

$$\delta x \le \frac{1}{1-\mu(A)\delta A}\left(\mu(A)\delta A + \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta y\|}{\|x^*\|}\right).$$

Остается оценить $\|x^*\|$ снизу из неравенства $\|y\| = \|Ax^*\| \le \|A\| \, \|x^*\|$. ■

Задача 1. Показать, что в случае эрмитовой матрицы A

$$\mu_2(A) = \frac{\max|\lambda_k|}{\min|\lambda_k|},$$

где λ_k — собственные числа матрицы A.

Задача 2. Показать, что для любой матрицы A и любой операторной нормы выполняется равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{\|A^s\|} = \rho(A).$$

§3 Вопросы устойчивости в задаче на собственные значения

Рассмотрим вопрос, насколько могут изменяться собственные числа и векторы матрицы при малом ее возмущении. Начнем с примеров, которые иллюстрируют те трудности, которые могут здесь возникнуть.

Пример 1. Пусть

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

так что $A_\varepsilon \in \mathbb{M}_n$ отличается от "канонического ящика Жордана" с единицами на главной диагонали лишь одним элементом: "в левом нижнем углу" стоит $\varepsilon \geq 0$. У матрицы A_0 $\lambda = 1$ является собственным числом кратности n. При $\varepsilon > 0$ все собственные числа матрицы A_ε различны: $\lambda_k = 1 + \sqrt[n]{\varepsilon} e^{i2\pi k/n}$, где $k = 0, \dots, n-1$. Отсюда два вывода. Во-первых, кратность собственного числа неустойчива по отношению к малым возмущениям матрицы. Во-вторых, в случае кратного собственного числа его возмущение может иметь меньший порядок малости, чем возмущение самой матрицы. Так, например, при $n = 10$ и $\varepsilon = 10^{-10}$ окажется $\lambda_0 = 1.1$.

Пример 2. Рассмотрим матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix};$$

у обеих этих близких при малом ε матрицах одни и те же собственные числа $1+\varepsilon$ и $1-\varepsilon$, но собственные векторы, нормированные условием $\|z\|_2 = 1$, у первой из них $(1,0)$ и $(0,1)$, а у второй $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$). Таким образом, в случае наличия близких собственных чисел малые возмущения матрицы могут кардинально менять систему ее собственных векторов.

Дальше будем рассматривать случай простого собственного числа.

Пусть $A_0 \in \mathbb{M}_n$, λ_0 — простое собственное число этой матрицы и z_0 — соответствующий собственный вектор. Устойчивость λ_0 и z_0 означает, что малые изменения матрицы A_0 вызывают малые изменения λ_0 и z_0, т.е. при малой матрице ΔA матрица $A_0 + \Delta A$ будет иметь собственное число $\lambda_0 + \Delta\lambda$ и соответствующий собственный вектор $z_0 + \Delta z$, где $\Delta\lambda$ и Δz малы. Поскольку собственный вектор определен с точностью до множителя, естественно считать его нормированным каким-либо условием и тем же условием нормированным вектор $z_0 + \Delta z$. Для определенности будем предполагать, что для некоторого вектора y_0 отлично от нуля скалярное произведение (z_0, y_0) и в качестве нормирующего условия для собственного вектора выберем

$$(z, y_0) = 1. \tag{1}$$

Теорема 1. Если λ_0 есть простое собственное число матрицы A_0, то в некоторой окрестности этой матрицы собственные число и вектор (нормированный условием (1)) суть непрерывно дифференцируемые функции ее элементов[5].

Доказательство начнем с λ. Пусть $P(A, \lambda)$ — характеристический полином матрицы A. Его коэффициенты суть непрерывно дифференцируемые (и даже полиномиальные) функции элементов матрицы A. Поскольку λ_0 — простое собственное число, в

[5]Это означает, что в некоторой области $\|A - A_0\| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ существуют непрерывно дифференцируемые функции $\lambda(A)$ и $z(A)$ элементов матрицы A, такие что $\lambda(A_0) = \lambda_0$, $z(A_0) = z_0$ и при всех A из этой области $\lambda(A)$ есть собственное число матрицы A, а $z(A)$ — соответствующий ему собственный вектор, нормированный условием (1). Как будет видно из доказательства, можно утверждать, что $\lambda(A)$ и $z(A)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

точке (A_0, λ_0) будет $\frac{\partial}{\partial\lambda} P(A, \lambda) \neq 0$, и по теореме о неявных функциях в некоторой окрестности A_0 корень $\lambda(A)$ характеристического полинома (т.е. собственное число матрицы A) есть непрерывно дифференцируемая функция элементов матрицы A.

Матрица $A_0 - \lambda_0 I$ имеет нулевой определитель, и не умаляя общности будем считать, что ее первая строка есть линейная комбинация остальных строк. Каждой близкой к A_0 матрице A и числу λ, близкому к λ_0, сопоставим матрицу $B(A, \lambda)$, которая получается из матрицы $A - \lambda E$ заменой ее первой строки на вектор y_0. Тогда матрица $B(A_0, \lambda_0)$ неособенная, поскольку вектор z_0 есть *единственное* решение системы уравнений $B(A_0, \lambda_0)z = e_1$. Если возмущения матрицы A_0 и числа λ_0 достаточно малы, то матрица $B(A, \lambda)$ также будет неособенной, причем элементы обратной матрицы $B^{-1}(A, \lambda)$ суть непрерывно дифференцируемые функции матрицы A и λ. Именно только такие A и λ мы будем теперь рассматривать.

Система уравнений $B(A, \lambda)z = e_1$ определяет z как неявную непрерывно дифференцируемую функцию аргументов A и λ: $z(A, \lambda)$. Тогда $z(A) = z\big(A, \lambda(A)\big)$ есть непрерывно дифференцируемая функция элементов матрицы A. Остается показать, что $z(A)$ есть собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу $\lambda(A)$. Действительно, строки матрицы $A - \lambda(A)E$, начиная со второй по последнюю, линейно независимы, т.к. они же — строки неособенной матрицы $B(A, \lambda(A))$. Но сама матрица $A - \lambda(A)E$ особенная, и поэтому ее первая строка есть линейная комбинация остальных. Поэтому, будучи ортогональным строкам со второй по n-ю этой матрицы, вектор $z(A)$ ортогонален и первой, т.е. есть собственный вектор матрицы A. ■

Степень устойчивости простого собственного числа и его собственного вектора зависит от величины их производных по элементам матрицы A. Получать соответствующие оценки мы будем в предположении, что *все* собственные числа матрицы A_0 простые.

Итак, пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — все и притом различные собственные числа матрицы A_0, $z_1, \ldots, z_n$ — соответствующие им собственные векторы. Комплексно сопряженные $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$ — собственные числа сопряженной матрицы A_0^*, и пусть $y_1, \ldots, y_n$ — соответствующие собственные векторы. Эти последние мы считаем фиксированными и в качестве нормирующего условия для вектора z_k и соответствующего вектора возмущенной матрицы выберем $(z, y_k) = 1$, так что $(z_k, y_j) = \delta_{kj}$.

Пусть ΔA — малое возмущение матрицы A_0, а $\Delta\lambda_k$ и Δz_k — вызванные им возмущения собственных чисел и векторов (в силу нормирующего условия $(\Delta z_k, y_k) = 0$). Тогда

$$(A_0 + \Delta A)(z_k + \Delta z_k) = (\lambda_k + \Delta\lambda_k)(z_k + \Delta z_k).$$

Переходя к дифференциалам:

$$(dA)z_k + A_0\, dz_k = \lambda_k\, dz_k + d\lambda_k z_k. \tag{2}$$

Умножим это равенство скалярно на y_j:

$$\big((dA)z_k, y_j\big) + \big(A_0(dz_k), y_j\big) = \lambda_k(dz_k, y_j) + d\lambda_k(z_k, y_j). \tag{3}$$

Здесь $\big(A_0(dz_k), y_j\big) = (dz_k, A_0^* y_j) = \lambda_j(dz_k, y_j)$, так что (3) может быть переписано в виде

$$\big((dA)z_k, y_j\big) = (\lambda_k - \lambda_j)(dz_k, y_j) + d\lambda_k(z_k, y_j). \tag{4}$$

В силу нормирующего условия $(z_k, y_k) = 1$, поэтому при $j = k$ равенство (4) дает

$$|d\lambda_k| = |\big((dA)z_k, y_k\big)| \le \|dA\|_2 \|z_k\|_2 \|y_k\|_2 = c_k \|dA\|_2.$$

Здесь

$$c_k = \|z_k\|_2 \|y_k\|_2 = \frac{\|z_k\|_2 \|y_k\|_2}{|(z_k, y_k)|}.$$

Последняя формула лучше в том отношении, что она не связана с нормирующим условием — написанное отношение инвариантно относительно *любой* нормировки векторов z_k и y_k. Число c_k называется *коэффициентом перекоса* матрицы A_0, соответствующим собственному числу λ_k. Очевидно, что всегда $c_k \ge 1$, а для эрмитовых матриц $c_k = 1$. Итак, задача нахождения простого собственного числа матрицы хорошо обусловлена, если только соответствующий этому числу коэффициент перекоса невелик.

Обратимся к собственным векторам. При $j \neq k$ $(z_k, y_j) = 0$ и из формулы (4) следует

$$(dz_k, y_j) = \big((dA)z_k, y_j\big)/(\lambda_k - \lambda_j).$$

Разложим вектор dz_k по векторам z_j: $dz_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} z_j$, $\alpha_{kj} = (dz_k, y_j)$. Тогда в силу нормирующего условия $\alpha_{kk} = 0$ и при $j \neq k$

$$|\alpha_{kj}| = \frac{|\big((dA)z_k, y_j\big)|}{|\lambda_k - \lambda_j|} \leq \frac{\|dA\|_2 \|z_k\|_2 \|y_j\|_2}{|\lambda_k - \lambda_j|},$$

откуда

$$\frac{\|dz_k\|_2}{\|z_k\|_2} \leq \|dA\|_2 {\sum_{j=1}^{n}}' \frac{\|z_j\|_2 \|y_j\|_2}{|\lambda_k - \lambda_j|} = \|dA\|_2 {\sum_{j=1}^{n}}' \frac{c_j}{|\lambda_k - \lambda_j|}.$$

Штрих у суммы означает, что слагаемое с номером k отсутствует — $\alpha_{kk} = 0$ ввиду нормирующего условия. Итак, задача отыскания собственного вектора, соответствующего простому собственному числу, хорошо обусловлена, если это собственное число достаточно далеко отстоит от остальных собственных чисел и все коэффициенты перекоса невелики. Впрочем, некоторую роль здесь играет еще порядок n матрицы.

В случае эрмитовой матрицы A можно указать оценку возмущения собственных чисел, вызванного возмущением ΔA, если ΔA также эрмитова матрица. Эта оценка связана с экстремальными свойствами собственных чисел эрмитовых матриц.

Пусть матрица $A \in \mathbb{M}_n$ эрмитова, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ — ее собственные числа, $z_1, \ldots, z_n$ — соответствующие собственные векторы, выбранные так, что $(z_k, z_j) = \delta_{kj}$.

Теорема 2. Справедливы равенства:

$$\lambda_k = \max\{\, (Ax, x) \;\big|\; \|x\|_2 = 1, (x, z_j) = 0 \;\text{ при } j = 1, \ldots, k-1 \,\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вектор x, удовлетворяющий выписанным условиям, разложим по векторам z_ν. Коэффициенты при z_ν для $\nu = 1, \ldots, k-1$ окажутся равными нулю, и $x = \sum_{\nu=k}^{n} \alpha_\nu z_\nu$, причем $\sum_{\nu=k}^{n} |\alpha_\nu|^2 = \|x\|_2^2 = 1$. Поэтому

$$(Ax, x) = \sum_{\nu=k}^{n} \lambda_\nu |\alpha_\nu|^2 \leq \lambda_k \sum_{\nu=k}^{n} |\alpha_\nu|^2 = \lambda_k.$$

В то же время $(Az_k, z_k) = \lambda_k$. ■

Введем функцию аргументов $h_j \in \mathbb{C}^n$:

$$\varphi_A(h_1, \ldots, h_{k-1}) = \\ = \max\{\, (Ax, x) \;\big|\; \|x\|_2 = 1, (x, h_j) = 0, j = 1, \ldots, k-1 \,\}.$$

Теорема 3 (минимально-максимальный принцип Куранта). Справедливо равенство

$$\min_{h_j} \varphi_A(h_1, \ldots, h_{k-1}) = \lambda_k = \varphi_A(z_1, \ldots, z_{k-1}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе из доказываемых равенств следует из теоремы 2. Поэтому $\min \varphi_A \leq \lambda_k$. Докажем обратное неравенство. Рассмотрим для произвольных h_j систему однородных линейных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu (z_\nu, h_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Пусть $\{\alpha_\nu\}$ ее ненулевое решение, нормированное условием $\sum |\alpha_\nu|^2 = 1$. Положим $x = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu z_\nu$. Тогда $\|x\|_2 = 1$, при $j = 1, \ldots, k-1$ $(x, h_j) = 0$ и $(Ax, x) = \sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_\nu|^2 \lambda_\nu \geq \lambda_k$. Итак, при любых h_j $\varphi_A(h_1, \ldots, h_{k-1}) \geq \lambda_k$. ■

Лемма. Пусть $A, B \in \mathbb{M}_n$ эрмитовы, λ_k^A и λ_k^B их собственные числа, расположенные в порядке убывания, $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ — собственные числа матрицы $A + B$. Тогда $\mu_k \leq \lambda_k^A + \lambda_1^B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{z_k\}$ собственные векторы матрицы A. Рассмотрим множество

$$\mathcal{M} = \{\, x \in \mathbb{C}^n \;\big|\; \|x\|_2 = 1, (x, z_j) = 0 \;\; \text{при } j = 1, \dots, k-1 \,\}.$$

По теореме 2 для $x \in \mathcal{M}$ $(Ax, x) \le \lambda_k^A$ и $(Bx, x) \le \lambda_1^B$ и потому $\big((A+B)x, x\big) \le \lambda_k^A + \lambda_1^B$. Теперь имеем

$$\mu_k = \min \varphi_{A+B}(h_1, \dots, h_{k-1}) \le \varphi_{A+B}(z_1, \dots, z_{k-1}) = \\ = \max\{\, \big((A+B)x, x\big) \;\big|\; x \in \mathcal{M} \,\} \le \lambda_k^A + \lambda_1^B. \quad \blacksquare$$

Следствие. В условиях леммы $\mu_k \le \lambda_k^A + \|B\|$ ($\|B\|$ — любая операторная норма матрицы B).

Теорема 4. Пусть матрицы A и ΔA эрмитовы и λ_k и $\lambda_k + \Delta\lambda_k$ собственные числа матриц A и $A + \Delta A$, расположенные в порядке убывания. Тогда для любой операторной нормы матриц $|\Delta\lambda_k| \le \|\Delta A\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию $\lambda_k + \Delta\lambda_k \le \lambda_k + \|\Delta A\|$, так что $\Delta\lambda_k \le \|\Delta A\|$. Применяя то же следствие к матрице $A = (A + \Delta A) - \Delta A$: $\lambda_k \le \lambda_k + \Delta\lambda_k + \|\Delta A\|$ и $-\|\Delta A\| \le \Delta\lambda_k$. $\blacksquare$

Задача. Показать, что в условиях леммы для матрицы A при любом k найдется такая эрмитова матрица B с различными собственными числами, что $\mu_k = \lambda_k^A + \lambda_1^B$.

§4 Метод исключений Гаусса

Метод исключений для решения системы n линейных уравнений заключается в следующем. Из первого уравнения первая неизвестная выражается через остальные, это выражение подставляется в остальные уравнения, и мы получаем систему $(n-1)$-го порядка относительно оставшихся неизвестных, с которой поступаем так же, и т.д. Это равносильно (на первом шаге) к переходу от системы уравнений с расширенной матрицей

$$A[1:n, 1:n+1] = \{a_{kj}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

к равносильной ей системе с расширенной матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 & b_{n+1}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & a_{2n+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^2 & a_{nn+1}^2 \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по формулам

$$b_j^1 = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \qquad a_{kj}^1 = a_{kj} - b_j^1 a_{k1},$$

т.е. первая строка матрицы A делится на a_{11}, а из остальных строк вычитается эта новая первая, умноженная на коэффициент при первой неизвестной. Полученную первую строку мы больше не трогаем, и на следующем шаге вторую строку делим на a_{22}^1 и , домножая на соответствующие коэффициенты, вычитаем из следующих строк. В результате после n таких шагов мы получим эквивалентную исходной систему уравнений с расширенной матрицей

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & b_2^1 & b_3^1 & \dots & b_{n-1}^1 & b_n^1 & b_{n+1}^1 \\ 0 & 1 & b_3^2 & \dots & b_{n-1}^2 & b_n^2 & b_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n+1}^n \end{pmatrix},$$

из которой легко находятся последовательно все неизвестные:

$$\left.\begin{array}{lllll} \xi_n & = & b_{n+1}^n & & \\ \xi_{n-1} & = & b_{n+1}^{n-1} & -b_n^{n-1}\xi_n & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1 & = & b_{n+1}^1 & -b_2^1\xi_2 & -\dots \quad -b_n^1\xi_n \end{array}\right\}.$$

Весь процесс решения требует порядка $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций.

Если требуется решить несколько (m) систем уравнений с одной и той же матрицей коэффициентов и различными правыми частями, то удобно это делать одновременно, преобразуя так же, как и раньше, расширенную матрицу коэффициентов, которая будет теперь содержать $n+m$ столбцов.

Метод в изложенной форме окажется неприменим, если $a_{11}=0$ или подобное обстоятельство встретится на одном из последующих шагов, например, $a_{22}^1=0$. Но плохо и в том случае, если, например, элемент $a_{22}^1 \neq 0$, но мал по абсолютной величине. Он получен путем вычитания, и его малость означает обычно, что велика его относительная погрешность (мы ведем счет с округлением результатов арифметических действий), а тогда и все последующие результаты будут иметь малую точность. Избежать этого можно, если на каждом шаге совершать перенумерацию уравнений или неизвестных, или того и другого. В связи с этим различают схемы исключения с выбором "ведущего элемента" по строке, по столбцу или по всей матрице. На первом шаге в первом случае это означает такое изменение порядка уравнений, чтобы после перестановки строк у новой матрицы оказалось $|a_{11}| \geq |a_{k1}|$ $(k=2,\ldots,n)$, во втором — такую перенумерацию неизвестных, чтобы было $|a_{11}| \geq |a_{1j}|$ $(j=2,\ldots,n)$, а в последнем — такую перестановку уравнений и перенумерацию неизвестных, чтобы оказалось $|a_{11}| \geq |a_{kj}|$ при $k,j=1,\ldots,n$. Подобная перенумерация осуществляется при переходе к каждому следующему шагу.

§5 Итеративные методы решения систем

Метод простой итерации.

Пусть система линейных алгебраических уравнений записана в виде

$$x = Ax + y. \tag{1}$$

Метод итерации заключается в том, что, взяв произвольный вектор (начальное приближение) x_0, строят последовательность векторов

$$x_s = Ax_{s-1} + y.$$

Очевидно, что если $x_s \to x^*$, то x^* — решение системы (1). Условимся решение системы всегда обозначать x^*.

Теорема 1. Для того чтобы при любом начальном приближении x_0 было $x_s \to x^*$, необходимо и достаточно условие $\rho(A) < 1$.

Доказательство. Из равенств $x^* = Ax^* + y$, $x_s = Ax_{s-1} + y$ следует, что $x_s - x^* = A(x_{s-1} - x^*) = A^s(x_0 - x^*)$. Поэтому для сходимости метода при любом начальном приближении необходимо и достаточно $A^s \to 0$, и остается воспользоваться теоремой 1 из §2 и добавить, что при $\rho(A) < 1$ решение x^* существует и единственно. ■

Замечание 1. Отметим связь метода итерации с рассмотренным в §2 рядом:

$$x_s = A^s x_0 + (E + A + A^2 + \cdots + A^{s-1})y.$$

Замечание 2. В случае $\rho(A) \geq 1$ метод расходится почти при любом начальном приближении x_0 — если только при разложении $x_0 - x^*$ по собственным векторам матрицы A хоть один из коэффициентов при собственных векторах, отвечающих собственным числам, таким что $|\lambda| \geq 1$, отличен от нуля.

Пусть теперь в $\mathbb{C}^n$ задана некоторая норма $\|\cdot\|$, и нормы матриц ниже — это операторные нормы, порожденные введеной векторной.

Теорема 2. Если $\|A\| < 1$, то $x_s \to x^*$ и выполняются оценки:

$$\|x_s - x^*\| \leq \frac{\|A\|^s}{1 - \|A\|}\|x_1 - x_0\|, \tag{2}$$

$$\|x_s - x^*\| \leq \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}\|x_s - x_{s-1}\|. \tag{3}$$

Доказательство. Сходимость следует из теоремы 1 и неравенства $\rho(A) \leq \|A\|$. Докажем оценку (2) Учитывая равенства $x_0 - x_1 = (E - A)x_0 - y$ и $x^* = (E - A)^{-1}y$, а также оценку $\|(E - A)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|A\|)$, имеем

$$\|x_0 - x^*\| \leq \|(E - A)^{-1}\| \, \|(E - A)x_0 - y\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}\|x_1 - x_0\|$$

и остается воспользоваться тем, что $x_s - x^* = A^s(x_0 - x^*)$.

Неравенство (3) немедленно следует из (2), если принять $\tilde{x}_0 = x_{s-1}$, и тогда $\tilde{x}_1 = x_s$. ■

З а м е ч а н и е. Оценка (2) является *априорной*. Это значит, что ее правая часть может быть вычислена *до того*, как построено само приближение x_s и она годится для того, чтобы заранее оценить, сколько шагов метода следует сделать, чтобы добиться необходимой точности. Оценка (3) *апостериорная* — ее правая часть вычисляется, когда x_s уже известно, и может служить для принятия решения о прекращении итераций, когда необходимая точность уже достигнута. Заметим одно преимущество оценки (3) — она остается верной, какие бы ошибки ни были допущены при вычислении x_j при $j = 1, \dots, s-1$.

Займемся вопросом о приведении системы уравнений к виду (1), если первоначально она задана в виде $Bx = z$. Остановимся на двух случаях.

1) Пусть $B = \{b_{kj}\}$ — матрица с диагональным преобладанием. Тогда систему $Bx = z$ можно переписать в виде $x = Ax + y$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b_{12}/b_{11} & \dots & -b_{1n}/b_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n1}/bnn & -bn2/b_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \zeta_1/b_{11} \\ \dots \\ \zeta_n/b_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Очевидно, что $\|A\|_\infty < 1$, и потому метод итерации будет сходиться.

2) Пусть B эрмитова матрица. Взяв $\alpha \neq 0$, приведем систему к эквивалентной: $x = x - \alpha(Bx - z)$, так что $A = E - \alpha B$, и займемся вопросом о выборе α. Пусть μ_k — собственные числа матрицы B. Тогда собственные числа матрицы A суть $\lambda_k = 1 - \alpha\mu_k$. Если собственные числа матрицы B имеют разные знаки, то среди λ_k найдется хоть одно, большее единицы. Поэтому выбор числа α, гарантирующий сходимость метода итерации, возможен лишь при условии, что все μ_k имеют один знак. Для определенности будем считать, что они положительны (тогда эрмитова матрица B называется положительной), так что следует выбрать $\alpha > 0$. Мы заинтересованы в том, чтобы $\|A\|_2 = \rho(A) = \max\{\alpha M - 1, 1 - \alpha m\}$,

где $m = \min \mu_k$, $M = \max \mu_k$, была минимальной. Этому соответствует выбор $\alpha = \frac{2}{M+m}$, тогда $\rho(A) = \frac{M-m}{M+m} < 1$. Заметим, что если собственные числа B имеют сильный разброс (M во много раз больше, чем m), то $\rho(A)$ близко к 1, и сходимость метода итерации может оказаться довольно медленной. Собственные числа матрицы B обычно неизвестны. Легко видеть, что если взять $0 < \alpha < \frac{1}{M'}$, где M' — любая верхняя граница для μ_k (например, $M' = \|B\|$), то окажется $\rho(A) < 1$, и метод итерации будет сходиться.

Метод Зайделя.

Это — другой итеративный способ решения системы (1). Предполагается заданным некоторое начальное приближение к решению x_0. Введем обозначения для компонент последующих приближений: $x_s = (\xi_1^s, \dots, \xi_n^s)$. Вычислительные формулы метода:

$$\left.\begin{array}{rc} \xi_1^{s+1} = & a_{11}\xi_1^s + a_{12}\xi_2^s + \dots + a_{1n}\xi_n^s + \eta_1 \\ \xi_2^{s+1} = & a_{21}\xi_1^{s+1} + a_{22}\xi_2^s + \dots + a_{2n}\xi_n^s + \eta_2 \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_n^{s+1} = & a_{n1}\xi_1^{s+1} + \dots + a_{nn-1}\xi_{n-1}^{s+1} + a_{nn}\xi_n^s + \eta_n \end{array}\right\}.$$

Эти формулы можно записать так: $x_{s+1} = Rx_s + Lx_{s+1} + y$, где

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A = R + L,$$

или $x_{s+1} = (E-L)^{-1}Rx_s + (E-L)^{-1}y$. Из теоремы 1 сразу же вытекает, что для сходимости метода Зайделя при любом начальном приближении x_0 необходимо и достаточно неравенство $\rho\big((E-L)^{-1}R\big) < 1$. Это условие трудно проверять, и мы докажем некоторый достаточный признак сходимости, но сначала отметим, что известны примеры, когда метод простой итерации сходится, а метод Зайделя нет, и наоборот, когда сходится метод Зайделя, но не метод простой итерации.

Теорема 3. Если $\|A\|_\infty < 1$, то метод Зайделя сходится при любом начальном приближении.

Доказательство. Положим

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|, \quad \gamma_i = \sum_{j=i}^{n} |a_{ij}|; \quad \max_i(\beta_i + \gamma_i) = \|A\|_\infty < 1.$$

Тогда

$$\beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \frac{\beta_i(1-\beta_i-\gamma_i)}{1-\beta_i} \geq 0, \qquad \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} \leq \beta_i + \gamma_i \leq \|A\|_\infty.$$

Так как $x^* = Rx^* + Lx^* + y$, то $x^* - x_{s+1} = L(x^* - x_{s+1}) + R(x^* - x_s)$. Пусть $\|x^* - x_{s+1}\|_\infty = |\xi_{i_0}^* - \xi_{i_0}^{s+1}|$. При этом

$$\xi_{i_0}^* - \xi_{i_0}^{s+1} = \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0 j}(\xi_j^* - \xi_j^{s+1}) + \sum_{j=i_0}^{n} a_{i_0 j}(\xi_j^* - \xi_j^s),$$

так что

$$\|x^* - x_{s+1}\|_\infty \leq \beta_{i_0}\|x^* - x_{s+1}\|_\infty + \gamma_{i_0}\|x^* - x_s\|_\infty,$$

$$\|x^* - x_{s+1}\|_\infty \leq \frac{\gamma_{i_0}}{1-\beta_{i_0}}\|x^* - x_s\|_\infty \leq \|A\|_\infty\|x^* - x_s\|_\infty.$$

Так как последнее неравенство выполняется при всех s, то дальнейшее очевидно. ■

Метод Некрасова

Если первоначально система уравнений задана в виде $Bx = z$, причем все диагональные элементы матрицы B отличны от нуля, то она приводится к виду (1), если для A и y воспользоваться формулами (4). Метод Зайделя, примененный к полученной таким путем системе (1), называется *методом Некрасова* для исходной системы.

Таким образом, компоненты следующего приближения x^{s+1} в методе Некрасова находятся по компонентам предыдущего из уравнений

$$\left.\begin{array}{cccccc}
b_{11}\xi_1^{s+1} & +b_{12}\xi_2^{s} & +b_{13}\xi_3^{s} & +\ldots & +b_{1n}\xi_n^{s} & =\zeta_1 \\
b_{21}\xi_1^{s+1} & +b_{22}\xi_2^{s+1} & +b_{23}\xi_3^{s} & +\ldots & +b_{2n}\xi_n^{s} & =\zeta_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_{n1}\xi_1^{s+1} & +b_{n2}\xi_2^{s+1} & +b_{n3}\xi_3^{s+1} & +\ldots & +b_{nn}\xi_n^{s+1} & =\zeta_n
\end{array}\right\}.$$

Теорема 4. Если выполнено хотя бы одно из условий

а) матрица B имеет диагональное преобладание,

б) матрица B положительно определена,

то метод Некрасова сходится при любом начальном приближении.

Доказательство. В случае а) утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 3.

Случай б). Положительно определенную матрицу B представим в виде суммы $B = R + D + R^*$, где

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы метода Некрасова приводятся к виду

$$(D + R^*)x_{s+1} + Rx_s = y, \qquad x_{s+1} = -(D + R^*)^{-1}Rx_s + (D + R^*)^{-1}y,$$

и для сходимости метода достаточно показать, что $\rho\big((D+R^*)^{-1}R\big) < 1$. Пусть λ и z собственное число и соответствующий собственный вектор этой матрицы, так что

$$Rz = \lambda Dz + \lambda R^* z = \lambda Bz - \lambda Rz.$$

Введем обозначения:

$$(Bz, z) = p > 0, \quad (Dz, z) = d > 0, \quad (Rz, z) = a + ib, \quad (R^*z, z) = a - ib.$$

Тогда $p = d + 2a$, и т.к. $(Rz, z) = \lambda(Bz, z) - \lambda(Rz, z)$, то $a + ib = \lambda(p - a - ib)$. Далее

$$\lambda = \frac{a + ib}{p - a - ib},$$

$$|\lambda|^2 = \frac{a^2 + b^2}{(p - a)^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + p(p - 2a)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + pd} < 1.$$

Поскольку λ любое собственное число, нужное неравенство для $\rho\big((D + R^*)^{-1}R\big)$ доказано. ■

Задача 1. Доказать, что правая часть оценки (3) всегда не больше правой части (2).

Задача 2. Показать, что в случае метода простой итерации по любым $\varepsilon > 0$ и начальному приближению x_0 найдется такая постоянная C_ε, что

$$\|x_s - x^*\| \le C_\varepsilon[\rho(A) + \varepsilon]^s.$$

§6 Обращение матриц

Построить матрицу $D = A^{-1}$, обратную данной, можно используя метод исключений Гаусса, поскольку j-й столбец матрицы D есть решение системы уравнений $Ax = e_j$. В §4 уже обращалось внимание, что решать несколько систем уравнений с одной и той же матрицей коэффициентов, но различными правыми частями удобно одновременно, в единой схеме. Именно так и следует поступать при обращении матриц, решая все n систем уравнений с правыми частями e_j одновременно.

При наличии не слишком плохого приближения D_0 к обратной матрице можно для построения обратной матрицы использовать итеративный процесс

$$D_{s+1} = D_s(2E - AD_s). \tag{1}$$

Стоит обратить внимание, что эта вычислительная формула вполне аналогична формуле метода Ньютона (касательных) для решения числового уравнения $\frac{1}{t} - a = 0$.

Формулу (1) удобно переписать в виде

$$R_s = E - AD_s, \quad D_{s+1} = D_s(E + R_s) \quad s = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Теорема. Для выполнения соотношения $D_s \to A^{-1}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $\rho(R_0) < 1$. Если при этом[6] $\|R_0\| = q < 1$, то выполняется оценка

$$\|D_s - A^{-1}\| \le \|D_0\| \frac{q^{2^s}}{1-q}. \tag{3}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $\rho(R_0) < 1$, то матрица $E - R_0 = AD_0$ обратима, а значит, обратима и A. Преобразуем формулу для R_{s+1}:

$$R_{s+1} = E - AD_{s+1} = E - AD_s(E + R_s) = E - AD_s - AD_sR_s = \\ = R_s - AD_sR_s = R_s^2.$$

Докажем необходимость. Если $D_s \to A^{-1}$, то $R_s \to 0$. Поскольку $R_s = R_0^{2^s}$, то $\rho(R_0) < 1$ является для этого необходимым условием.

Докажем достаточность и оценку (3). Если $\rho(R_0) < 1$, то $R_s = R_0^{2^s} \to 0$, т.е. $AD_s \to E$ и $D_s \to A^{-1}$. Если $\|R_0\| = q < 1$, то $\|R_s\| = \|R_0^{2^s}\| \le \|R_o\|^{2^s} = q^{2^s}$. Далее

$$A^{-1} - D_s = A^{-1}R_s, \quad \|A^{-1} - D_s\| \le \|A^{-1}\| q^{2^s}$$

и остается заметить, что

$$AD_0 = E - R_0, \quad A = (E - R_0)D_0^{-1}, \quad A^{-1} = D_0(E - R_0)^{-1}, \\ \|A^{-1}\| \le \|D_0\| \, \|(E - R_0)^{-1}\|,$$

причем $\|(E - R_0)^{-1}\| \le \frac{1}{1-q}$ ■

[6] Как обычно считаем заданной некоторую векторную норму, и матричная — операторная, порожденная этой векторной.

З а м е ч а н и е. Следует подчеркнуть, что оценка (3) означает очень быструю сходимость процесса (2).

Следствие. Если матрица A эрмитова и обратима, то при $D_0 = \alpha A$, где $0 < \alpha < \frac{2}{(\rho(A))^2}$, процесс (2) сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если λ_k — собственные числа матрицы A (они вещественны), то при указанном выборе D_0 собственными числами матрицы R_0 будут $1-\alpha\lambda_k^2$. Все они меньше 1, а неравенство $\alpha < \frac{2}{((\rho(A))^2}$ гарантирует, что они больше -1. ■

Следствие гарантирует сходимость процесса для эрмитовой матрицы, если взять, например, $D_0 = \frac{1}{\|A\|^2}A$ при любой операторной норме матрицы.

§7 Степенной метод

В задаче на отыскание собственных чисел и векторов матрицы A различают полную и частичную проблему собственных чисел. В первом случае требуется найти все собственные числа и векторы, а во втором — одно собственное число (чаще всего максимальное по модулю) и соответствующий собственный вектор. Степенной метод — это метод решения частичной проблемы собственных чисел.

Идея метода основана на анализе поведения последовательности векторов

$$y_k = A^k y_0 = A y_{k-1}, \tag{1}$$

где y_0 произвольно взятый ненулевой вектор. Будем считать, что матрица A имеет полную систему собственных векторов, λ_j — ее собственные числа, а z_j — соответствующие собственные векторы, причем $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Пусть $y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j$ — разложение вектора y_0 по собственным векторам. Тогда

$$y_k = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k z_j = \lambda_1^k \left[\alpha_1 z_1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \alpha_j z_j\right]. \tag{2}$$

Основной случай

Будем сейчас считать, что $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ (основной случай) и что $\alpha_1 \neq 0$ (это условие обычно выполнено для произвольно взятого y_0).

Тогда суммой, стоящей в правой части (2), при больших k можно пренебречь, и мы имеем приближенное равенство $y_k \approx \lambda_1^k \alpha_1 z_1$. Пусть u — некоторый вектор, такой что $(z_1, u) \neq 0$. Положим

$$\varphi_k = (y_k, u) = \lambda_1^k \left[\alpha_1 (z_1, u) + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k \alpha_j (z_j, u) \right].$$

Тогда, как видно из этой формулы, $\varphi_k / \varphi_{k-1} \to \lambda_1$ и, более того,

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \right).$$

Если $|\lambda_1| < 1$, то векторы y_k стремятся к нулевому, а при $|\lambda| > 1$ — к бесконечности (по норме). Это обычно неудобно, и поэтому на каждом шаге процесса часто осуществляют некоторую нормировку этих векторов, так что процесс выглядит так:

$$\tilde{x}_0 = y_0, \quad x_k = \frac{\tilde{x}_k}{(\tilde{x}_k, u)}, \quad \tilde{x}_{k+1} = A x_k. \tag{3}$$

Векторы $\tilde{x}_k$ и x_k лишь числовыми множителями отличаются от вектора y_k: $x_k = \beta_k y_k$, и для введенных выше чисел φ_k имеем

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}} = \frac{(y_k, u)}{(y_{k-1}, u)} = \frac{(A y_{k-1}, u)}{(y_{k-1}, u)} = \frac{(A x_{k-1}, u)}{(x_{k-1}, u)} = (\tilde{x}_k, u),$$

поскольку $(x_{k-1}, u) = 1$, так что приближения к λ_1 и z_1 даются формулами

$$\lambda_1^{(k)} = (\tilde{x}_k, u), \quad z_1^k = x_k.$$

Вектор x_k, будучи нормирован условием $(x_k, u) = 1$, с точностью до вектора порядка малости $\mathcal{O}\big((\lambda_2/\lambda_1)^k\big)$ совпадает с собственным вектором z_1, если последний нормирован тем же условием.

В качестве нормирующего вектора u удобно выбирать один из ортов e_j. После нескольких шагов процесса, когда наметилась некоторая стабилизация векторов x_k, целесообразно в качестве j взять номер максимальной по модулю компоненты x_k. Фактически доказана теорема о сходимости метода, при формулировке которой будут использоваться введенные выше обозначения; кроме того, мы будем предполагать, что при всех k $(y_k, u) \neq 0$.

Теорема. Пусть выполнены условия:
1) $|\lambda_1| > |\lambda_2|$;
2) $(z_1, u) = 1$;
3) $\alpha_1 \neq 0$.

Тогда описанный формулами (3) процесс сходится: $\lambda_1^{(k)} \to \lambda_1$, $z_1^k \to z_1$, причем

$$\lambda_1^{(k)} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right), \quad z_1^k = z_1 + \Delta z^k, \quad \|\Delta z^k\| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right).$$

З а м е ч а н и е . Если в условиях теоремы $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, $(u, z_2) \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$, то характер сходимости $\lambda_1^{(k)}$ к λ_1 можно охарактеризовать более точно:

$$\lambda_1^{(k)} = \lambda_1 + c\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k\right),$$

где

$$c = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\alpha_2(z_2, u)}{\alpha_1(z_1, u)}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

При сделанных предположениях такое же уточнение можно получить и по отношению к сходимости векторов $z_1^k = (\zeta_1^k, \ldots, \zeta_n^k)$ к собственному вектору $z_1 = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Действительно,

$$y_k = \lambda_1^k\left[\alpha_1 z_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k z_2 + w_k\right], \quad \|w_k\| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k\right),$$

и так как $z_1^k = x_k = y_k/(y_k, u)$, то для любого вектора v

$$(z_1^k, v) = \frac{\lambda_1^k\big[\alpha_1(z_1, v) + \alpha_2(\lambda_2/\lambda_1)^k(z_2, v) + \varepsilon_{k1}\big]}{\lambda_1^k\big[\alpha_1 + \alpha_2(\lambda_2/\lambda_1)^k(z_2, u) + \varepsilon_{k2}\big]}, \quad \varepsilon_{kj} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^k\right).$$

Отсюда нетрудно усмотреть, что

$$(z_1^k, v) = (z_1, v) + c(v)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k\right),$$

Взяв в качестве v орты: $v = e_j$, имеем

$$\zeta_j^k = \zeta_j + c_j\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k\right),$$

Метод скалярных произведений.

Если матрица A эрмитова, то располагая векторами x_k, построенными согласно (3), можно получить существенно лучшее приближение к λ_1. Действительно, поскольку собственные векторы z_j попарно ортогональны, то

$$(y_k, y_k) = \alpha_1^2\lambda_1^{2k}(z_1, z_1) + \sum_{j=2}^{n}\alpha_j^2\lambda_j^{2k}(z_j, z_j),$$

аналогичный вид имеет и (y_k, y_{k-1}), так что

$$\frac{(y_k, y_k)}{(y_k, y_{k-1})} = \lambda_1\frac{1 + \sum_{j=2}^{n}\gamma_j\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{2k}}{1 + \sum_{j=2}^{n}\gamma_j\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{2k-1}}, \quad \gamma_j = \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)^2\frac{(z_j, z_j)}{(z_1, z_1)}.$$

Таким образом

$$\tilde{\lambda}_1^{(k)} = \frac{(y_k, y_k)}{(y_k, y_{k-1})} = \frac{(\tilde{x}_k, \tilde{x}_k)}{(\tilde{x}_k, x_{k-1})} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)$$

есть, вообще говоря, существенно лучшее приближение к λ_1, чем $\lambda_1^{(k)}$. В этом и состоит метод скалярных произведений. Улучшить этим методом приближение к собственному вектору эрмитовой матрицы не удается.

Случай $|\lambda_2| = |\lambda_1|$.

Остановимся кратко на случае $|\lambda_2| = |\lambda_1|$, считая для простоты матрицу A вещественной; тогда и векторы y_0 и u естественно считать вещественным. Из всех возможностей разберем три наиболее характерные.

1) λ_1 — кратное собственное число: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m$, причем $|\lambda_1| > |\lambda_{m+1}|$. Тогда

$$y_k = \lambda_1^k \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j z_j + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k z_j \right],$$

откуда видно, что $\lambda_1^{(k)}$ и z_1^k, построенные по формулам (3), сходятся соответственно к λ_1 и некоторому из собственных векторов матрицы A, соответствующих λ_1, с той же быстротой, что указана в теореме. То обстоятельство, что λ_1 кратное собственное число, в процессе счета замечено не будет.

2) $\lambda_2 = -\lambda_1$, $|\lambda_1| > |\lambda_3|$. В этом случае

$$y_k = \lambda_1^k \left[\alpha_1 z_1 + (-1)^k \alpha_2 z_2 + \sum_{j=3}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k z_j \right].$$

Поэтому характерным признаком, по которому мы можем судить, что имеем дело с этим случаем, будет близость при больших k векторов x_k и x_{k-2} при существенном отличии x_{k-1} от x_k. Приближения к собственным числам и векторам можно вычислить по формулам

$$\big(\lambda_1^{(k)}\big)^2 = \big(\lambda_2^{(k)}\big)^2 = \frac{(y_k, u)}{(y_{k-2}, u)}, \quad z_m^k = c_m(y_k + \lambda_m^{(k)} y_{k-1}), \quad m = 1, 2.$$

Заниматься представлением правых частей этих формул через векторы $\tilde{x}_k$ и x_k не будем.

3) $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ и $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$ — комплексно сопряженные собственные числа, $\rho > |\lambda_3|$. Векторы z_1 и z_2 имеют комплексно сопряженные компоненты. Поскольку векторы y_0 и u вещественные, то числа $\alpha_{1-2}(z_{1-2}, u) = re^{\pm i\varphi}$ также комплексно сопряжены. Поэтому числа

$$(y_k, u) = \rho^k \big[2r\cos(k\theta + \varphi) + \mathcal{O}\big((\lambda_3/\rho)^k\big) \big]$$

ведут себя “неправильно”, что и служит признаком комплексно сопряженных наибольших по модулю собственных чисел. Модуль первых двух собственных чисел может быть приближенно найден по формуле

$$\rho^2 \approx \frac{(y_k, u)(y_{k-2}, u) - (y_{k-1}, u)^2}{(y_{k-1}, u)(y_{k-3}, u) - (y_{k-2}, u)^2},$$

так как

$$\begin{aligned}(y_k, u)(y_{k-2}, u) - (y_{k-1}, u)^2 \approx \\ \approx \rho^{2k-2} 4r^2 \left[\cos(k\theta + \varphi)\cos((k-2)\theta + \varphi) - \cos^2((k-1)\theta + \varphi)\right] = \\ = -4r^2 \sin^2\theta\, \rho^{2k-2}.\end{aligned}$$

Приводить формулы для вычисления θ не будем.

Метод обратных итераций.

Пусть нам требуется найти *наименьшее по модулю* собственное число λ_n матрицы A. Поскольку $\mu = \frac{1}{\lambda_n}$ — наибольшее по модулю собственное число матрицы $B = A^{-1}$, то можно найти λ_n, применяя степенной метод к матрице B. Обращать матрицу A нерационально, более выгодно вычислять на каждом шаге вектор y_k, решая систему уравнений $Ay_k = y_{k-1}$. При решении этих систем методом исключений следует учитывать, что все они имеют одну и ту же матрицу коэффициентов, так что значительная часть вычислений при решении этих систем проделывается только один раз. В этом и состоит метод обратных итераций.

Метод обратных итераций можно применять для уточнения произвольного собственного числа λ матрицы A, если для него известно достаточно хорошее приближение $\lambda^{(0)}$. Следует воспользоваться тем, что $\lambda - \lambda^{(0)}$ есть собственное число матрицы $B = A - \lambda^{(0)} E$, минимальное по модулю, если $\lambda^{(0)}$ — хорошее приближение. Более того, сходимость метода обратных итераций для нахождения $\lambda - \lambda^{(0)}$ будет в этом случае очень быстрой.

Задача. Пусть для матрицы A $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$, $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$, $\rho > |\lambda_3|$. Рассмотрев последовательность

$$p_k = \frac{(y_{k-1}, u)(y_{k+2}, u) - (y_k, u)(y_{k+1}, u)}{(y_{k-1}, u)(y_{k+1}, u) - (y_k, u)^2},$$

указать способ нахождения $\mathrm{Re}\lambda_1$ степенным методом в этом случае.

§8. Метод Крылова

Метод А.Н.Крылова — это метод решения полной проблемы собственных чисел, основанный на вычислении коэффициентов характеристического полинома матрицы A. С самого начала будем предполагать, что все собственные числа этой матрицы различны — в противном случае метод имеет некоторые осложнения.

Метод основан на равенстве Кели–Гамильтона. Пусть

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_n \quad -$$

характеристический полином матрицы A. Тогда

$$P_n(A) = (-1)^n A^n + p_1 A^{n-1} + \cdots + p_n E = 0.$$

В случае, когда матрица A имеет полную систему собственных векторов, это равенство доказывается совсем просто. Действительно, пусть z — собственный вектор: $Az = \lambda z$. Тогда $P_n(A)z = P_n(\lambda)z = 0$ (т.к. λ — собственное число). Ввиду полноты системы собственных векторов и для любого вектора x будет $P_n(A)x = 0$, и значит $P_n(A)$ нулевая матрица.

Обратимся к методу. Возьмем произвольный ненулевой вектор y_0 и вычислим векторы

$$y_k = (\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_n^{(k)}), \quad y_k = A^k y_0 = A y_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Векторное равенство $P_n(A)y_0$ перепишем покомпонентно, перенеся первое слагаемое в правую часть:

$$\left.\begin{array}{llll} \eta_1^{(n-1)} p_1 & + \cdots + & \eta_1^{(0)} p_n & = (-1)^{n+1} \eta_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_n^{(n-1)} p_1 & + \cdots + & \eta_n^{(0)} p_n & = (-1)^{n+1} \eta_n^{(n)} \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Будем рассматривать (1) как систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов характеристического полинома и кратко запишем ее в виде $Yp = (-1)^{n-1} y_n$ (матрица Y и вектор y_n известны, ищется вектор $p = (p_1, \dots, p_n)$). Пусть z_k собственные векторы матрицы A: $Az_k = \lambda_k z_k$ (напомним, что все λ_k различны), и пусть $y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j$.

Теорема. для того чтобы матрица Y системы уравнений (1) была неособенной, необходимо и достаточно чтобы при всех j было $\alpha_j \neq 0$[7].

Доказательство. Введем обозначения для компонент векторов $z_j = (\zeta_1^{(j)}, \dots, \zeta_n^{(j)})$ и определим матрицы Z, Λ и диагональную матрицу D:

$$Z = \begin{pmatrix} \zeta_1^{(1)} & \dots & \zeta_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \zeta_n^{(1)} & \dots & \zeta_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку элемент k-й строки и j-го столбца матрицы Y есть

$$\eta_k^{(n-j)} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \lambda_\nu^{n-j} \zeta_k^{(\nu)},$$

то $Y = ZD\Lambda$. Матрица Z неособенная, поскольку собственные векторы z_k линейно независимы, матрица Λ неособенная как матрица Вандермонда, а для того чтобы D была неособенной, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты α_j были отличны от нуля. ■

Замечание. Если среди собственных чисел матрицы A имеются равные, то $\det \Lambda = 0$, так что и $\det Y = 0$. В этом и состоит упоминавшееся в начале параграфа затруднение.

[7]Про такой вектор y_0 иногда говорят, что он “находится в общем положении”.

Пусть коэффициенты полинома P_n уже вычислены и его корни λ_k — собственные числа матрицы A найдены. Обратимся к нахождению собственных векторов. Построим полиномы

$$P_{n-1}^{(k)}(\lambda) = \frac{P_n(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)} = (-1)^n \lambda^{n-1} + p_1^{(k)} \lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}^{(k)}.$$

Очевидно, что $P_{n-1}^{(k)}(\lambda_j) = 0$ при $j \neq k$ и $P_{n-1}^{(k)}(\lambda_k) = P_n'(\lambda_k) \neq 0$. Поэтому $P_{n-1}^{(k)}(A) z_j = P_{n-1}^{(k)}(\lambda_j) z_j = 0$ $(j \neq k)$ и $P_{n-1}^{(k)}(A) z_k = P_n'(\lambda_k) z_k$. Таким образом

$$P_{n-1}^{(k)}(A) y_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_{n-1}^{(k)}(A) z_j = \alpha_k P_n'(\lambda_k) z_k = \tilde{z}_k$$

есть собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ_k. Остается еще заметить, что

$$\tilde{z}_k = (-1)^n y_{n-1} + p_1^{(k)} y_{n-2} + \cdots + p_{n-1}^{(k)} y_0. \tag{2}$$

Итак, алгоритм метода Крылова состоит в следующем:

1) выбирается произвольный ненулевой вектор y_0 и строятся векторы $y_k = A y_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$;

2) путем решения системы уравнений (1) находятся коэффициенты характеристического полинома $P_n(\lambda)$ матрицы A;

3) собственные числа λ_k матрицы A находятся как корни полинома $P_n(\lambda)$;

4) вычисляются коэффициенты полиномов $P_{n-1}^{(k)}(\lambda) = P_n(\lambda)/(\lambda - \lambda_k)$;

5) собственные векторы $\tilde{z}_k$ вычисляются по формулам (2).

Если определитель системы уравнений (1) оказался нулевым, то это означает, что либо у матрицы A имеется кратное собственное число, либо вектор y_0 выбран неудачно, и тогда его следует заменить.

§9 Метод Якоби

В этом параграфе матрицы будем считать вещественными.

Метод Якоби — это метод решения полной проблемы собственных чисел для симметричных матриц.

Напомним некоторые сведения из линейной алгебры. Матрица T называется ортогональной, если ее столбцы попарно ортогональны и сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице, т.е. если[8] $T'T = E$. Произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица. Если A — симметричная матрица, а T — ортогональная, то $T'AT$ также симметричная и собственные числа этих матриц совпадают. Симметричная матрица A может быть ортогональным преобразованием приведена к диагональному виду, т.е. существует такая ортогональная матрица T, что $T'AT = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица. При этом диагональные элементы матрицы Λ — собственные числа матрицы A, а столбцы матрицы T — соответствующие собственные векторы.

Введем обозначения для сумм квадратов всех элементов матрицы A и ее диагональных элементов[9]:

$$t^2(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2, \qquad d^2(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2.$$

Тогда $r^2(A) = t^2(A) - d^2(A)$ — сумма квадратов недиагональных элементов.

Лемма 1. Если A - симметричная матрица, а T — ортогональная и $B = T'AT$, то $t^2(B) = t^2(A)$.

Доказательство. Очевидно равенство[10] $t^2(A) = \mathrm{tr}(A^2)$. Поэтому

$$t^2(B) = \mathrm{tr}(B^2) = \mathrm{tr}(T'ATT'A'T) = \mathrm{tr}(T'A^2T) = \mathrm{tr}(A^2) = t^2(A) \quad \blacksquare$$

---

[8]Штрих означает транспонирование матрицы.

[9]$t(A)$ называется нормой Фробениуса матрицы A.

[10]tr(A) — след матрицы A, сумма ее диагональных элементов, равная сумме собственных чисел.

Элементарной ортогональной матрицей назовем ортогональную матрицу $T_{ij}(\varphi)$ $(i < j)$, которая лишь четырьмя элементами отличается от единичной: $t_{ii} = t_{jj} = \cos\varphi$, $-t_{ij} = t_{ji} = \sin\varphi$.

Лемма 2. Пусть $B = T'_{ij}(\varphi)AT_{ij}(\varphi)$. Тогда матрица B лишь двумя столбцами и двумя строками с номерами i и j отличается от матрицы A (т.е. при $\mu \neq i, j$ и $\nu \neq i, j$ будет $b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$). Кроме того $\hat{B} = T'(\varphi)\hat{A}T(\varphi)$. Здесь

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ b_{ji} & b_{jj} \end{pmatrix}, \quad T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad -$$

матрицы второго порядка.

Лемма 3. Для симметричной матрицы A и индексов $i < j$ найдется такой угол φ, что для матрицы $B = T'_{ij}(\varphi)AT_{ij}(\varphi)$ окажется $b_{ij} = b_{ji} = 0$. При таком выборе φ

$$b_{ii}^2 + b_{jj}^2 = a_{ii}^2 + a_{jj}^2 + 2a_{ij}^2. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 1, нетрудно получить, что при произвольном φ

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{jj} - a_{ii})\sin 2\varphi + a_{ij}\cos 2\varphi.$$

Если $a_{ii} = a_{jj}$, то достаточно положить $\varphi = \pi/4$, а при $a_{ii} \neq a_{jj}$

$$\varphi = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}.$$

Формула (1) следует из леммы 1. ■

Метод Якоби состоит в построении последовательности матриц A_s $(A_0 = A)$ с таким расчетом, чтобы при больших s матрицы A_s были близки к диагональным, так что их диагональные элементы близки к собственным числам матрицы A. Матрица A_{s+1} строится в виде $A_{s+1} = T'_sA_sT_s$, где $T_s = T_{ij}(\varphi)$, индексы $i = i_s$ и $j = j_s$ находятся из условия $|a_{ij}^{(s)}| = \max_{\mu\neq\nu}|a_{\mu\nu}^{(s)}|$, а $\varphi = \varphi_s$ вычисляется (согласно лемме 2) так, чтобы оказалось $a_{ij}^{(s+1)} = 0$. Напомним, что каждая следующая матрица отличается от предыдущей лишь двумя строками и столбцами.

Теорема. При $s \to \infty$ все недиагональные элементы матриц A_s стремятся к нулю.

Доказательство. Достаточно доказать, что $r^2(A_s) \to 0$. Согласно лемме 3 $t^2(A_{s+1}) = t^2(A_s)$. Все диагональные элементы матриц A_{s+1} и A_s, кроме двух, совпадают, и ввиду равенства (1) $d^2(A_{s+1}) = d^2(A_s) + 2\left(a_{ij}^{(s)}\right)^2$, причем согласно выбору индексов i_s и j_s $\left(a_{ij}^{(s)}\right)^2 \geq r^2(A_s)/[n(n-1)]$ и потому

$$d^2(A_{s+1}) \geq d^2(A_s) + 2r^2(A_s)/[n(n-1)],$$

$$\begin{aligned} r^2(A_{s+1}) = t^2(A_{s+1}) - d^2(A_{s+1}) \leq \\ \leq t^2(A_s) - d^2(A_s) - 2r^2(A_s)/[n(n-1)] = qr^2(A_s), \end{aligned}$$

где $q = 1 - 2/[n(n-1)] < 1$. Методом индукции теперь легко показывается, что $r^2(A_s) \leq q^s r^2(A)$, откуда и следует сходимость. ■

Покажем, что диагональные элементы матриц A_s сходятся к собственным числам матрицы A. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ — собственные числа матрицы A, а значит, и A_s, и пусть $\mu_1^{(s)} \geq \mu_2^{(s)} \geq \cdots \geq \mu_n^{(s)}$ — диагональные элементы матрицы A_s, расположенные в порядке убывания.

Следствие. При $s \to \infty$ выполняется соотношение $\mu_k^{(s)} \to \lambda_k$.

Доказательство. Представим матрицу A_s в виде $A_s = \Lambda_s + R_s$, где Λ_s — диагональная матрица, а у R_s на главной диагонали нули. По доказанной теореме $R_s \to 0$. Так как $\mu_k^{(s)}$ - собственные числа матрицы Λ_s, то по теореме 4 из §3 при всех k $|\lambda_k - \mu_k^{(s)}| < \|R_s\|$. ■

Замечание. Из теоремы следует сходимость метода с быстротой геометрической прогрессии со знаменателем q, близким при большом n к единице. В действительности сходимость метода существенно быстрее.

Итак, за приближения к собственным числам матрицы A принимаются при большом s диагональные элементы матрицы A_s. За приближения к собственным векторам можно принять столбцы матрицы $T_1T_2\ldots T_s$.

§10 Об ускорении сходимости

.

Пусть имеется сходящаяся числовая последовательность $a_s \to a^*$. Ускорением сходимости называется построение другой последовательности $\{b_s\}$, которая сходится к тому же пределу a^*, но быстрее, чем исходная. Для того, чтобы это было возможно, мы должны располагать некоторой дополнительной информацией о последовательности $\{a_s\}$. В этом параграфе будем предполагать известным, что $\{a_s\}$ сходится к пределу с быстротой общего члена геометрической прогрессии, т.е. что

$$a_s = a^* + q^s(c + \varepsilon_s), \tag{1}$$

где $c \neq 0$, $0 < |q| < 1$ и $\varepsilon_s \to 0$. Числа a^*, c и последовательность ε_s нам неизвестны (получение лучших, чем a_s, приближений к a^* и составляет цель ускорения сходимости), известен только факт существования такого представления. Что касается q, то следует различать два случая, когда q известно хотя бы приближенно, и неизвестно. Первый случай связан с методом Л.А.Люстерника ускорения сходимости метода итерации решения систем линейных уравнений.

Метод Люстерника.

Итак, нам известно, что a_s имеют представление (1) и известно число q. Из (1) следует, что $a_s - qa_{s-1} = (1-q)a^* + q^s(\varepsilon_s - \varepsilon_{s-1})$, и если мы положим $b_s = (a_s - qa_{s-1})/(1-q)$, то окажется $b_s = a^* + \frac{1}{1-q}q^s(\varepsilon_s - \varepsilon_{s-1})$ и $(b_s - a^*)/(a_s - a^*) = \frac{1}{1-q}(\varepsilon_s - \varepsilon_{s-1})/(c+\varepsilon_s) \to 0$. Это и означает, что b_s сходится к a^* быстрее, чем a_s.

Положение не изменится, если под a^*, a_s, c, ε_s мы будем понимать векторы. Тогда (1) — векторное равенство, и если векторы b_s строить по формуле $b_s = (a_s - qa_{s-1})/(1-q)$, то т.к.

$\|b_s - a^*\| \le \frac{1}{1-q} q^s(\|\varepsilon_s\| + \|\varepsilon_{s-1}\|)$ и $\|a_s - a^*\| \ge q^s(\|c\| - \|\varepsilon_s\|)$, будет $\|b_s - a^*\|/\|a_s - a^*\| \to 0$.

Обратимся теперь к методу итерации для решения системы линейных уравнений $x = Ax + y$: $x_{s+1} = Ax_s + y$. Сделаем предположения: 1) максимальное по модулю собственное число матрицы A, имеющей полную систему собственных векторов, единственно, так что $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \dots \ge |\lambda_n|$; 2) при разложении вектора $x_0 - x^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j$ по собственным векторам матрицы A $\alpha_1 \ne 0$. Тогда

$$x_s - x^* = A^s(x_0 - x^*) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^s z_j = \lambda_1^s \left(\alpha_1 z_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^s z_j \right) = \\ = \lambda_1^s(\alpha_1 z_1 + \varepsilon_s), \quad \|\varepsilon_s\| \to 0,$$

т.е. последовательность $\{x_s\}$ имеет представление (1) при $q = \lambda_1$. В то же время

$$x_s - x_{s-1} = x_s - x^* - (x_{s-1} - x^*) = \lambda_1^{s-1}\big((\lambda_1 - 1)\alpha_1 z_1 + \lambda_1 \varepsilon_s - \varepsilon_{s-1}\big),$$

откуда видно, что если $(z_1, u) \ne 0$, то

$$\lambda_1^{(s)} = \frac{(x_s - x_{s-1}, u)}{(x_{s-1} - x_{s-2}, u)} \to \lambda_1,$$

и можно при больших s заменить $q = \lambda_1$ на $\lambda_1^{(s)}$ (в сущности мы применили для нахождения приближения к λ_1 степенной метод). В этом и состоит метод Люстерника, имеющий вычислительные формулы:

$$\lambda_1^{(s)} = \frac{(x_s - x_{s-1}, u)}{(x_{s-1} - x_{s-2}, u)},$$

$$\tilde{x}_s = \frac{x_s - \lambda_1^{(s)} x_{s-1}}{1 - \lambda_1^{(s)}} = \frac{1}{1 - \lambda_1^{(s)}} x_s - \frac{\lambda_1^{(s)}}{1 - \lambda_1^{(s)}} x_{s-1}.$$

Вектор $\tilde{x}_s$, вообще говоря, ближе к x^*, чем x_s. Метод особенно эффективен, если $|\lambda_1|$ существенно больше, чем $|\lambda_2|$.

δ^2-процесс Эйткена.

Рассмотрим второй случай, когда в представлении (1) числовой последовательности коэффициент q нам неизвестен. Пренебрегая малыми слагаемыми ε_j, будем находить b_s из системы уравнений относительно b_s, c и q

$$\left.\begin{aligned} a_{s-1} &= b_s + cq^{s-1} \\ a_s &= b_s + cq^s \\ a_{s+1} &= b_s + cq^{s+1} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Система легко решается:

$$q = \frac{a_{s+1} - a_s}{a_s - a_{s-1}}, \qquad b_s = \frac{a_s - qa_{s-1}}{1-q} = \frac{\begin{vmatrix} a_{s+1} & a_s \\ a_s & a_{s-1} \end{vmatrix}}{a_{s+1} - 2a_s + a_{s-1}}.$$

Последняя формула и применяется для вычисления b_s.

Лемма. При любом a выполняется равенство

$$b_s = a + \frac{\begin{vmatrix} a_{s+1} - a & a_s - a \\ a_s - a & a_{s-1} - a \end{vmatrix}}{a_{s+1} - 2a_s + a_{s-1}}. \qquad (3)$$

Доказательство можно провести непосредственным вычислением, но оно следует также из того, что при тех же q и c число $b_s - a$ удовлетворяет равенствам (2), если из их левых частей вычесть a. ■

При вычислениях используют именно формулу (3), выбирая a близким к a_s, чтобы избежать существенного влияния ошибок округления в произведениях при вычислении определителя. В частности, если положить $a = a_s$, то

$$b_s = a_s + \frac{(a_{s+1} - a_s)(a_{s-1} - a_s)}{a_{s+1} - 2a_s + a_{s-1}}.$$

Для последовательностей рассматриваемого вида последовательность $\{b_s\}$ сходится к a^* быстрее, чем $\{a_s\}$:

Теорема. Если $0 < |q| < 1$ и $c \neq 0$, то

$$\frac{b_s - a^*}{a_s - a^*} \to 0.$$

Доказательство. Используя для b_s формулу (3) при $a = a^*$, имеем

$$b_s - a^* = \frac{\begin{vmatrix} q^{s+1}(c+\varepsilon_{s+1}) & q^s(c+\varepsilon_s) \\ q^s(c+\varepsilon_s) & q^{s-1}(c+\varepsilon_{s-1}) \end{vmatrix}}{q^{s+1}(c+\varepsilon_{s+1}) - 2q^s(c+\varepsilon_s) + q^{s-1}(c+\varepsilon_{s-1})} =$$
$$= q^s \frac{c(\varepsilon_{s+1} + \varepsilon_{s-1} - 2\varepsilon_s) + \varepsilon_{s+1}\varepsilon_{s-1} - \varepsilon_s^2}{q(c+\varepsilon_{s+1}) - 2(c+\varepsilon_s) + \frac{1}{q}(c+\varepsilon_{s-1})} = \frac{e_s}{Q_s} q^s.$$

Здесь $e_s \to 0$ и $Q_s \to c\left(q - 2 + \frac{1}{q}\right) = \frac{c}{q}(1-q)^2 \neq 0$. Поэтому

$$\frac{b_s - a^*}{a_s - a^*} = \frac{e_s}{(c+\varepsilon_s)Q_s} \to 0. \qquad \blacksquare$$

Замечание. Как видно из доказательства, порядок сходимости b_s к a^* определяется формулой $b_s - a^* = \mathcal{O}\big(q^s(|\varepsilon_s| + |\varepsilon_{s+1}| + |\varepsilon_{s-1}|)\big)$.

Вспомним степенной метод нахождения максимального собственного числа матрицы A. Как было показано в §7, при соответствующих предположениях

$$\lambda_1^{(s)} = \lambda_1 + c\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2s} + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^s\right).$$

Итак, при тех условиях, которые указаны в §7, последовательность $\{\lambda_1^{(s)}\}$ принадлежит к тому классу последовательностей, к которым применим δ^2-процесс Эйткена. Последовательность $\{\mu_1^{(s)}\}$, полученная из $\{\lambda_1^s\}$ этим методом, сходится к λ_1 быстрее, причем, согласно замечанию,

$$\mu_1^{(s)} - \lambda_1 = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2s} + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{s}\right).$$

δ^2-процесс применим и к методу скалярных произведений в случае эрмитовой матрицы A, а также к уточнению собственных векторов x_s, полученных степенным методом; в последнем случае речь идет о покомпонентном применении этого метода. Останавливаться на подробностях не будем.

Задача. Определить быстроту сходимости полученной с помощью δ^2-процесса последовательности приближений к λ_1 в случае метода скалярных произведений.