Глава 5
Численное решение задачи Коши

§1 Простейшие методы

Будем рассматривать задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Численное решение этой задачи — построение таблицы приближенного решения, чаще всего для равноотстоящих узлов $x_k = x_0 + kh$ ($h > 0$ — шаг): $y_k \approx y(x_k)$.

Метод Эйлера.

В точке x_0 легко найти производную решения: $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Поскольку (при малом шаге h)

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

то можно положить $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. По аналогичной формуле можно найти y_2 и т.д. В этом и состоит метод Эйлера:

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k). \tag{2}$$

В методе Эйлера не обязательно считать узлы x_k равноотстоящими. Если $x_{k+1} = x_k + h_k$, то в правой части (2) h следует заменить на h_k.

Метод Эйлера имеет простой геометрический смысл. Если каждую точку (x_k, y_k) соединить отрезком со следующей, то мы получим ломаную линию — график приближенного решения. Поэтому метод Эйлера называют иногда *методом ломаных.* Звенья этой ломаной — отрезки касательных, проведенных в точке (x_k, y_k) к проходящей через эту точку интегральной кривой.

Если функцию f считать дифференцируемой, то погрешность метода Эйлера на одном шаге имеет порядок $\mathcal{O}(h^2)$. Это означает, что в предположении, что $y_k = y(x_k)$ будет $y(x_{k+1}) - y_{k+1} = \mathcal{O}(h^2)$.

В действительности, кроме ошибки, вызванной тем, что в формуле Тейлора мы ограничились лишь двумя членами, в y_{k+1} войдет еще и "наследственная" ошибка — y_{k+1} не совпадает с $y(x_{k+1})$, в частности, и по той причине, что все предыдущие значения $y_k, \ldots, y_1$ были найдены неточно. Для получения решения нашей задачи на промежутке $[x_0, X]$ нам придется сделать примерно $(X - x_0)/h$ шагов, и так как на каждом шаге мы допускаем ошибку порядка h^2, то можно ожидать, что ошибка, допущенная на всем промежутке, будет порядка h. Влияние "наследственных ошибок" зависит от свойств решаемого уравнения. В частности, если интегральные линии с ростом x сближаются (это так, если $\partial f/\partial y < 0$), то влияние "наследственных ошибок" убывает, а если расходятся ($\partial f/\partial y > 0$), то возрастает.

Метод Эйлера прост. Главный его недостаток — малая точность. В связи с этим рассматриваются некоторые усовершенствования этого метода. Сам метод Эйлера допускает такую трактовку: в равенстве

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(t)dt = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \qquad (3)$$

стоящий в правой части интеграл приближенно заменяется на $hf(x_k, y_k)$. Усовершенствования связаны с более точным приближением этого интеграла.

1-й усовершенствованный метод.

Упомянутый выше интеграл будем вычислять по формуле средних прямоугольников, причем неизвестное нам значение подынтегральной функции в середине промежутка будем находить с помощью метода Эйлера. Это приводит с следующему алгоритму:

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}\right), \quad \text{где} \quad y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k).$$

Оценим погрешность этой формулы на одном шаге (для краткости обозначений — на первом), считая при этом функцию f нужное число раз дифференцируемой. В понятных обозначениях для точного решения имеем

$$y(x_1) = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \mathcal{O}(h^3), \quad y_0' = f(x_0, y_0), \quad y_0'' = f_x' + y_0' f_y'.$$

Для приближенного решения:

$$y_1 = y_0 + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}y_0'\right) =$$
$$= y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}f_x' + \frac{h^2}{2}y_0'f_y' + \mathcal{O}(h^3) = y(x_1) + \mathcal{O}(h^3).$$

Итак, погрешность метода на одном шаге имеет порядок малости h^3.

2-ой усовершенствованный метод.

Интеграл, стоящий в правой части (3), будем вычислять по формуле трапеций, опять используя для приближения неизвестного значения подынтегральной функции на правом конце промежутка метод Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\big), \text{ где } \tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

При оценке ошибки этого метода на одном шаге для точного решения будем использовать то же разложение, что и выше, а для приближенного:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\big(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hy_0')\big) =$$
$$= y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}f_x' + \frac{h^2}{2}y_0'f_y' + \mathcal{O}(h^3) = y(x_1) + \mathcal{O}(h^3).$$

Итак, ошибка этого метода на одном шаге также имеет порядок малости h^3.

При решении задачи (1) на заданном промежутке обоими этими усовершенствованными методами можно ожидать погрешность порядка $\mathcal{O}(h^2)$.

Задача. Найти порядок погрешности на одном шаге метода, определяемого (на первом шаге) формулами:

$$\overline{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0), \quad \tilde{y}_1 = y_{1/2} + \frac{h}{2}f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1/2}\right),$$
$$y_1 = 2\tilde{y}_1 - \overline{y}_1.$$

§2 Методы Адамса.

Квадратурные формулы Адамса.

При рассмотрении во второй главе интерполяционных квадратурных формулах предположение о том, что узлы этих формул принадлежали промежутку интегрирования, не делалось, хотя это было так в приведенных там конкретных формулах. Сейчас мы рассмотрим формулы, в которых часть узлов не принадлежит этому промежутку.

Определение 1. *Экстраполяционными квадратурными формулами Адамса* называются интерполяционные квадратурные формулы для промежутка $[0,1]$ с узлами $0,-1,\dots,-p$

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j^p g(-j) + R_p(g), \tag{1}$$

а также подобные им формулы.

Согласно определению интерполяционных квадратурных формул коэффициенты α_j^p вычисляются по правилу

$$\alpha_j^p = \int_0^1 \left(\prod_{k=0,k\neq j}^{p} (k+x)\right) \Bigg/ \left(\prod_{k=0,k\neq j}^{p} (k-j)\right) dx.$$

Найдем представление остаточного члена формулы (1) в предположении должной дифференцируемости функции g. Пусть $P_p(x)$ — интерполяционный полином функции g, построенный по узлам $0,-1,\dots,-p$, и $\omega(x) = \prod_{k=0}^{p}(x+k)$. Поскольку формула (1) интерполяционная. то

$$R_p(g) = \int_0^1 \big(g(x) - P_p(x)\big)dx = \frac{1}{(p+1)!}\int_0^1 \omega(x) g^{(p+1)}\big(\eta(x)\big)dx =$$
$$= \frac{1}{(p+1)!}\int_0^1 \omega(x)dx\, g^{(p+1)}(\xi) = A_p g^{(p+1)}(\xi) \quad \xi\in(-p,1).$$

Мы воспользовались представлением остатка интерполяции, леммой из §1 главы 2 и неотрицательностью полинома $\omega(x)$ на промежутке $[0,1]$.

Приведем таблицу коэффициентов формулы (1) для первых значений p, а также значений коэффициентов A_p остаточного члена.

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	A_p
$p=1$	$3/2$	$-1/2$			$5/12$
$p=2$	$23/12$	$-4/3$	$5/12$		$3/8$
$p=3$	$55/24$	$-59/24$	$37/24$	$-3/8$	$251/720$

Определение 2. *Интерполяционными квадратурными формулами Адамса* называются интерполяционные квадратурные формулы для промежутка $[0,1]$ с узлами $1, 0, -1, \ldots, -(p-1)$

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p g(-j) + R_p(g), \tag{2}$$

а также подобные им формулы.

При $p=1$ эта формула совпадает с формулой трапеций. Коэффициенты формулы (2):

$$\beta_j^p = \int_0^1 \left(\prod_{k=-1, k\neq j}^{p-1} (k+x) \right) \Bigg/ \left(\prod_{k=-1, k\neq j}^{p-1} (k-j) \right) dx.$$

Поскольку полином $\omega(x) = (x-1)x(x+1)\ldots(x+p-1)$ не меняет знака на $[0,1]$, то как и в случае экстраполяционной формулы Адамса легко получить представление остаточного члена в форме Лагранжа:

$$R_p(g) = B_p g^{(p+1)}(\xi), \quad B_p = \frac{1}{(p+1)!}\int_0^1 \omega(x)dx, \quad \xi \in (-p+1, 1).$$

Приведем таблицу коэффициентов β_j^p и B_p.

	$j=-1$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	B_p
$p=1$	$1/2$	$1/2$			$-1/12$
$p=2$	$5/12$	$2/3$	$-1/12$		$-1/24$
$p=3$	$3/8$	$19/24$	$-5/24$	$1/24$	$-19/720$

Формулы Адамса обычно применяются, когда функция f задана таблицей своих значений в равноотстоящих узлах $x_k = x_0 + kh$: $f(x_k) = f_k$ и требуется вычислить интеграл от этой функции по промежутку между двумя соседними узлами. Применяя формулы, подобные формулам Адамса, тогда получим в случае экстраполяционной формулы

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=0}^{p} \alpha_j^p f_{k-j}, \qquad R_p(f) = A_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi),$$

а в случае интерполяционной

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p f_{k-j}, \qquad R_p(F) = B_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi).$$

Часто эти формулы записывают в другом виде, с использованием конечных разностей. Действительно, квадратурная сумма есть интеграл от интерполяционного полинома функции f. В случае экстраполяционной формулы воспользуемся формулой Ньютона для конца таблицы

$$P_p(x_k + th) = f_k + t\Delta f_{k-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{k-2} + \dots$$

и тем, что

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} P_p(x)dx = h \int_0^1 P_p(x_k + th)dt.$$

Тогда получим экстраполяционную формулу Адамса в виде:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h\Big[f_k + \frac{1}{2}\Delta f_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{k-3} +$$

$$+ \frac{251}{720}\Delta^4 f_{k-4} + \dots + a_p \Delta^p f_{k-p}\Big], \quad R_p(f) = A_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi). \quad (3)$$

В случае интерполяционной формулы

$$P_p(x_{k+1} + th) = f_{k+1} + t\Delta f_k + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{k-1} + \dots,$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} P_p(x)dx = h\int_{-1}^{0} P_p(x_{k+1} + th)dt,$$

так что интерполяционная формула Адамса принимает вид

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h\Big[f_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta f_k - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{k-2} -$$

$$- \frac{19}{720}\Delta^4 f_{k-3} - \dots - b_p \Delta^p f_{k-p+1}\Big], \quad R_p(f) = B_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\xi). \quad (4)$$

Экстраполяционный метод Адамса.

Вернемся к задаче Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Мы ищем значения приближенного решения в равноотстоящих узлах $x_j = x_0 + jh$. Пусть при $j = 0, \dots, k$, где $k \geq p-1$, эти приближенные значения $y_j \approx y(x_j)$ уже найдены. Будем искать y_{k+1}. По формуле Ньютона - Лейбница

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся экстраполяционной формулой Адамса, заменив значения y' в узлах приближенными значениями $y'(x_j) \approx f(x_j, y_j)$, и заменим $y(x_k)$ на y_k. Тогда, полагая $\eta_j = hf(x_j, y_j)$, получим

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\eta_k + \Delta\eta_{k-1} + \dots + a_p \Delta^p \eta_{k-p} \quad (5)$$

или в безразностной форме

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{j=0}^{p} \alpha_j^p \eta_{k-p}.$$

Метод Адамса есть способ *продолжения* таблицы — первые значения искомой функции должны быть найдены другим способом. Если метод применяется в разностной форме, то к тому моменту, когда мы вычисляем y_{k+1}, мы должны располагать таблицей (в случае $p = 3$)

$$\begin{array}{cccccc}
x_j & y_j & \eta_j & \Delta\eta_j & \Delta^2\eta_j & \Delta^3\eta_j \\
\dots & \dots & \dots & & \dots & \\
 & & & \dots & & \dots \\
x_{k-2} & y_{k-2} & \eta_{k-2} & & \Delta^2\eta_{k-3} & \\
 & & & \Delta\eta_{k-2} & & \Delta^3\eta_{k-3} \\
x_{k-1} & y_{k-1} & \eta_{k-1} & & \Delta^2\eta_{k-2} & \\
 & & & \Delta\eta_{k-1} & & \\
x_k & y_k & \eta_k & & &
\end{array}$$

Значение y_{k+1} вычисляется по формуле (5). В эту формулу входят разности, находящиеся в нижней косой строке. После этого вычисляется $\eta_{k+1} = hf(x_{k+1}, y_{k+1})$, заполняется следующая косая строка разностей, и все готово для следующего шага. Безразностная форма метода позволяет избежать вычисления разностей.

Счет с разностями обычно применяется при ручных вычислениях. Он имеет то преимущество, что позволяет контролировать разумность выбранного порядка метода p и шага h — первый отброшенный в формуле (5) член не должен превосходить принятую точность вычисления решения. Впрочем, при $p > 5$ метод обычно не применяется, поскольку в разностях высокого порядка сильно влияние ошибок округления.

При счете на компьютере обычно применяется безразностная формула. Тогда требуются другие способы контроля за шагом h.

Интерполяционный метод Адамса.

Отличие этого метода от экстраполяционного состоит в том, что для вычисления интеграла по $[x_k, x_{k+1}]$ от производной решения используется интерпроляционная квадратурная формула Адамса. Тогда мы приходим к формуле

$$y_{k+1} = y_k + \eta_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta\eta_k - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{k-1} - \dots \qquad (6)$$

или в безразностной форме

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p \eta_{k-j}. \qquad (7)$$

Когда нам следует вычислить y_{k+1}, величина η_{k+1} (и разности, входящие в (6), если мы используем эту формулу) нам неизвестна. Поэтому (6) и (7) следует рассматривать как *уравнение* вида $y_{k+1} = \varphi(y_{k+1})$, решив которое, мы и найдем искомое значение y_{k+1}. Уравнение легко решается методом итерации: выбрав начальное приближение y_{k+1}^0, мы строим последующие $y_{k+1}^\nu = \varphi(y_{k+1}^{\nu-1})$. Легко видеть, что $\varphi'(y) = h\beta_{-1}^p f_y'(x_{k+1}, y)$. Поскольку вычисления обычно ведутся с малым шагом h, эта производная мала по абсолютной величине, и метод итерации сходится очень быстро. Хорошее начальное приближение y_{k+1}^0 получают обычно, используя экстраполяционный метод Адамса. При использовании конечных разностей есть и другой способ построения начального приближения. Обычно шаг h выбирается так, что последние используемые разности порядка p (для определенности пусть $p = 3$) почти постоянны с принятой точностью вычислений. Поэтому полагают $\Delta^3\eta_{k-2}^0 = \Delta^3\eta_{k-1}$ и путем сложения заполняют косую строку разностей вплоть до η_{k+1}^0, после чего y_{k+1}^0 находят по формуле (6).

При вычислениях на компьютере без разностей часто используется комбинация экстраполяционного и интерполяционного методов Адамса. Сначала вычисляется по экстраполяционному методу Адамса значение y_{k+1}^0, и оно уточняется по формуле (7). По разности этих двух значений можно судить о пригодности выбранного шага вычислений.

Системы уравнений и уравнения высшего порядка.

Методы Адамса применимы и для решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений. Для определенности ограничимся рассмотрением системы второго порядка (обобщение на случай любого порядка очевидно):

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z), \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0.$$

Формулы методов Адамса выводились при единственном предположении, что $\eta_k \approx hy'(x_k)$. Пусть приближенные значения $y_j \approx y(x_j)$ и $z_j \approx z(x_j)$ при $j = 0, \dots, k$ уже известны. Учитывая, что $hy'(x_j) \approx hf(x_j, y_j, z_j) = \eta_j$ и $hz'(x_j) \approx hg(x_j, y_j, z_j) = \zeta_j$, мы можем для нахождения y_{k+1} и z_{k+1} использовать формулы Адамса

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{j=0}^{p} \alpha_j^p \eta_j, \quad z_{k+1} = z_k + \sum_{j=0}^{p} \alpha_j^p \zeta_j$$

в случае экстраполяционного метода, а в случае интерполяционного

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p \eta_j, \quad z_{k+1} = z_k + \sum_{j=-1}^{p-1} \beta_j^p \zeta_j.$$

Эти формулы можно было бы записать и с конечными разностями. В случае интерполяционного метода на каждом шаге нам, естественно, придется решать *систему* двух уравнений методом итерации.

Методы Адамса применимы и для решения задачи Коши для уравнений высшего порядка:

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \; \dots, \; y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)},$$

поскольку эта задача легко сводится к задаче Коши для системы введением новых неизвестных функций $z_l = y^{(l)}$ $(l = 1, \dots, m-1$:

$$\left.\begin{aligned} y' &= z_1 \\ z_1' &= z_2 \\ &\dots \\ z_{m-2}' &= z_{m-1} \\ z_{m-1}' &= f(x, y, z_1, \dots, z_{m-1}) \end{aligned}\right\}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad z_1(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad z_{m-1}(x_0) = y_0^{(m-1)}.$$

Два заключительных замечания. Во-первых, еще раз напомним, что оба метода Адамса требуют, чтобы начало таблицы было построено каким-либо другим способом. Во-вторых, если в процессе счета нам потребовалось изменить шаг интегрирования, то это связано с необходимостью построения нового начала таблицы, что может быть сделано, например, с помощью интерполяции.

Задача. Установить связь между коэффициентами A_p и B_p остаточных членов формул Адамса с коэффициентами формул (3) и (4):

$$A_p = a_{p+1}, \qquad B_p = b_{p+1}.$$

§3 Способы построения начала таблицы

В этом параграфе излагаются некоторые способы построения начала таблицы, т.е. вычисления приближенных значений $y_j \approx y(x_j)$ $(x_j = x_0 + jh)$ решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

при малых j.

1. Разложение решения в ряд Тейлора.

Пусть $y(x)$ — решение нашей задачи: $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$. Дифференцируя это тождество, мы получим:

$$\begin{aligned} y''(x) &= f_x'\big(x, y(x)\big) + f_y'\big(x, y(x)\big), \\ y'''(x) &= f_{xx}''\big(x, y(x)\big) + 2f_{xy}''\big(x, y(x)\big)y'(x) + f_{yy}''\big(x, y(x)\big)[y'(x)]^2 + \\ &\qquad + f_y'\big(x, y(x)\big)y''(x) \end{aligned}$$

и, продолжая дифференцирование, представление следующих производных. Учитывая, что $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, и подставляя x_0 в приведенные формулы, мы можем найти в этой точке значения производных решения $y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)}$. После этого приближенные значения решения в интересующих нас точках находятся из формулы Тейлора:

$$y(x_j) \approx y_j = y_0 + (jh)y_0' + \frac{(jh)^2}{2!}y_0'' + \cdots + \frac{(jh)^n}{n!}y_0^{(n)}.$$

При построении начала таблицы начальные точки выгодно брать как правее, так и левее точки x_0. Например, если мы собираемся применять метод Адамса 4-го порядка и нам требуется знать пять первых значений, то в качестве начальных точек берут $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$. Это лучше, чем x_0, x_2, x_2, x_3, x_4, поскольку позволяет брать меньше членов в разложении Тейлора.

2. Итеративный метод (метод А.Н.Крылова)

Для определенности будем считать, что требуется построить (кроме известного x_0) еще три первых значения решения задачи (1) y_1, y_2, y_3. Нетрудно построить интерполяционные квадратурные формулы

$$\int_k^{k+1} g(x)dx \approx \sum_{j=0}^{3} A_j^k g(j), \quad k = 0, 1, 2. \tag{2}$$

Приведем таблицу их коэффициентов

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$k=0$	$3/8$	$19/24$	$-5/24$	$1/24$
$k=1$	$-1/24$	$13/24$	$13/24$	$-1/24$
$k=2$	$1/24$	$-5/24$	$19/24$	$3/8$

Тогда, используя квадратурные формулы, подобные (2), для решения $y(x)$ имеем

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\big(x, y(x)\big)dx \approx$$

$$\approx h \sum_{j=0}^{3} A_j^k f(x_j, y_j) = \Delta y_k.$$

Таким образом для неизвестных Δy_k $(k = 0, 1, 2)$ мы получаем (учитывая, что y_0 известно) систему уравнений

$$\Delta y_k = \varphi_k(\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2), \quad k = 0, 1, 2.$$

Здесь

$$\varphi_k(\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2) = h \sum_{j=0}^{3} A_j^k f(x_j, y_j), \quad \text{где } y_j = y_0 + \sum_{l=0}^{j-1} \Delta y_l.$$

При малых h производные функций φ_k малы, и для решения системы быстро сходится метод итерации. Начальное приближение может быть построено, например, методом Эйлера.

Оба изложенных метода применимы и в случае задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, а значит, и для уравнений высшего порядка.

Для построения начала таблицы можно применять также излагаемый в следующем параграфе метод Рунге - Кутта.

Задача. Объяснить связь при $k = 0$ и $k = 2$ коэффициентов A_j^k, приведенных в таблице, с коэффициентами квадратурной интерполяционной формулы Адамса.

§4 Метод Рунге - Кутта

Начнем сразу с вычислительных формул. Пусть для задачи Коши

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

уже найдено приближенное значение решения в точке x_n: $y(x_n) \approx y_n$, и требуется найти решение в точке $x_{n+1} = x_n + h$. Согласно методу Рунге - Кутта это делается по формулам:

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{2}$$

Это — некоторый аналог применения для вычисления интеграла в равенстве

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(t)dt$$

квадратурной формулы Симпсона. Действительно, $k_1 \approx hy'(x_n)$, k_2 и k_3 — некоторые приближения к $hy'(x_n + h/2)$, а k_4 — к $hy'(x_{n+1})$.

Основным и неочевидным свойством метода Рунге - Кутта является то, что его погрешность на одном шаге имеет порядок малости $\mathcal{O}(h^5)$. Это означает, что если функция f имеет нужное число производных, а y_n точно совпадает с $y(x_n)$ и мы разложим $y(x_{n+1})$ и правую часть равенства (2) по степеням h, то расхождения в этих разложениях начнутся лишь с членов, содержащих h^5. Связанные с этим выкладки чрезвычайно громоздки[1], и мы их приводить не будем.

Метод Рунге - Кутта применим и для систем дифференциальных уравнений, а значит, и для уравнений высшего порядка. Для системы двух уравнений

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z).$$

формулы метода таковы

$$\begin{array}{cc}
k_1 = hf(x_n, y_n, z_n) & l_1 = hg(x_n, y_n, z_n) \\
k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) & l_2 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) \\
k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right) & l_3 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right) \\
k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3) & l_4 = hg(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3),
\end{array}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad z_{n+1} = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).$$

Отметим некоторые свойства метода Рунге - Кутта в сравнении с методами Адамса. На одном шаге метод Рунге - Кутта имеет погрешность того же порядка, что и методы Адамса при $p = 3$. В то же время в экстрапояционном методе Адамса на одном шаге требуется вычислять лишь одно значение правой части f, в интерполяционном — в зависимости от числа итераций, в среднем можно считать 2-3 значения, а в методе Рунге - Кутта 4 значения. Если использовать методы Адамса при $p = 4, 5$, то и шаг в этих методах можно выбирать больше. Так что метод Рунге - Кутта существенно более трудоемок, чем методы Адамса. По этой причине до появления вычислительных машин метод Рунге - Кутта рассматривался в основном как способ построения начала таблицы. Но с появлением машин на первый план вышли некоторые преимущества метода

[1]Их можно найти в книге И.П.Мысовских “Лекции по методам вычислений”, СПбГУ 1998

Рунге - Кутта, о которых будет сказано ниже, и этот метод применяется для решения задач Коши на больших промежутках. Впрочем, если решение задач Коши является составной частью больших вычислений, и таких задач требуется решить очень много, то фактор трудоемкости может оказаться очень существенным.

Метод Рунге - Кутта имеет два важных преимущества перед методами Адамса. Во-первых, он не требует предварительного построения начала таблицы и сам пригоден для такого построения. Во-вторых, шаг в этом методе не обязательно постоянный, и его изменение в любой момент не связано с дополнительными трудностями. Напомним, что в методах Адамса переход к новому шагу связан с необходимостью строить новое начало таблицы.

Для контроля за выбором шага в методе Рунге - Кутта иногда применяется просчет одной задачи с разными шагами.

Задача. Доказать основное свойство метода Рунге - Кутта (порядок точности на одном шаге) для случая простейшего дифференциального уравнения $y' = f(x)$.

§5 О граничных задачах

.

Существуют приближенные методы решения граничных задач, общие для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных (метод сеток, проекционные методы). Эти методы будут изучаться во второй части курса (7-й семестр). В этом параграфе речь пойдет лишь о методах, специфичных для ОДУ. Это методы сведения граничной задачи к задачам Коши. Первый из них так и называется:

Метод сведения к задачам Коши.

Будем рассматривать граничную задачу для *линейного* ОДУ второго порядка:

$$\begin{aligned} L(y) = &y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ &A_0y'(a) + B_0y(a) = D_0, \quad A_1y'(b) + B_1y(b) = D_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Общее решение нашего дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1z_1(x) + C_2z_2(x) + y_0(x), \tag{2}$$

где y_0 — какое-либо частное решение ($L(y_0) = f$), а z_1 и z_2 — линейно независимые решения однородного уравнения $L(z_k) = 0$. Если мы построим y_0, z_1 и z_2 как решения некоторых задач Коши, то нам останется только подобрать постоянные C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Это требование даст нам систему двух линейных уравнений относительно искомых постоянных.

Сказанное выше позволяет свести решение задачи (1) к решению трех задач Коши. В действительности можно обойтись решением двух задач Коши. Выберем какие-нибудь числа y_0, y_0', z_0 и z_0', которые удовлетворяют равенствам $A_0 y_0' + B_0 y_0 = D_0$, $A_0 z_0' + B_0 z_0 = 0$ и найдем решения двух задач Коши:

$$L(y_0) = f, \quad y_0(a) = y_0, \quad y'(a) = y_0',$$

$$L(z_1) = 0, \quad z_1(a) = z_0, \quad z'(a) = z_0'.$$

Пусть z_2 какое-то решение уравнения $L(z_2) = 0$, линейно независимое с z_1, так что $A_0 z_2(a) + B_0 z_2(a) \neq 0$. Решение задачи (1), если оно существует, должно иметь вид (2) при некоторых постоянных C_1 и C_2, для определения которых мы имеем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{c}
\big(A_0 z_1'(a) + B_0 z_1(a)\big)C_1 + \big(A_0 z_2'(a) + B_0 z_2(a)\big)C_2 + \\
+\big(A_0 y_0'(a) + B_0 y_0(a)\big) = D_0 \\
\big(A_1 z_1'(b) + B_1 z_1(b)\big)C_1 + \big(A_1 z_2'(b) + B_1 z_2(b)\big)C_2 + \\
+\big(A_1 y_0'(b) + B_1 y_0(b)\big) = D_1
\end{array}\right\}$$

В силу выбора начальных условий для y_0 и z_1 первое из этих уравнений есть $\big(A_0 z_2'(a) + B_0 z_2(a)\big)C_2 = 0$, т.е. $C_2 = 0$, и из второго уравнения мы сразу же находим C_1. Нам остается построить решение задачи (1) как линейную комбинацию y_0 и z_1: $y^*(x) = y_0(x) + C_1 z_1(x)$.

Отметим одну трудность, которая может встретиться при применении этого метода. Если однородное уравнение $L(z) = 0$ имеет быстро- и медленнорастущие решения, то может оказаться, что вблизи правого конца b промежутка решения y_0 и z_1 “почти линейно зависимы”, и нам придется строить “небольшое” решение нашей задачи как линейную комбинацию “больших” “почти линейно зависимых” функций, что связано с пропаданием знаков. Приведем

Пример Рассмотрим граничную задачу

$$L(y) = y'' - y' - 6y = 6, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Мы будем пользоваться тем, что общее решение соответствующего однородного уравнение известно: $C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$, так что нетрудно найти решение поставленной задачи в явном виде, но тем не менее будем считать, что это решение мы ищем численно рассмотренным методом (можно считать, что коэффициенты дифференциального уравнения переменные, но близки к написанным постоянным — качественная картина при этом будет такая же). Найдем y_0 как решение нашего дифференциального уравнения при условиях Коши: $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 1$:

$$y_0(x) = \frac{3}{5}e^{3(1+x)} + \frac{2}{5}e^{-2(1+x)} - 1,$$

а z_1 как решение задачи Коши $L(z_1) = 0$, $z(-1) = 0$, $z'(-1) = 1$:

$$z_1(x) = \frac{1}{5}e^{3(1+x)} - \frac{1}{5}e^{-2(1+x)}.$$

Будем считать, что мы нашли эти функции численно с 5 верными значащими цифрами, так что $y_0(1) = 241.05$, $z_1(1) = 80.682$ и решение нашей задачи $y^*(x) = y_0(x) + C_1z_1(x)$, где $C_1 = -y_0(1)/z_1(1) = -2.9816$. При $x = 1/2$ получаем $y^*(1/2) = 53.030 + 17.993C_1 = -0.619$, и это значение получилось всего лишь с 3 верными знаками.

2. Метод дифференциальной прогонки.

Для простоты ограничимся рассмотрением задачи

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{3}$$

$$y'(a) + \alpha_0 y(a) = \beta_0, \quad y'(b) + \alpha_1 y(b) = \beta_1. \tag{4}$$

Лемма. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — решения дифференциальных уравнений

$$\alpha' + p\alpha - \alpha^2 = q, \qquad \beta' + (p - \alpha)\beta = f. \tag{5}$$

Тогда любое решение дифференциального уравнения

$$y' + \alpha y = \beta \tag{6}$$

удовлетворяет уравнению (3).

Доказательство. Пусть y — решение уравнения (6). Тогда $y'' = -\alpha' y - \alpha y' + \beta'$ и потому

$$y''+py'+qy = (p-\alpha)y'+(q-\alpha')y+\beta' = (p-\alpha)(\beta-\alpha y)+(q-\alpha')y+\beta' =$$
$$= (\alpha^2 - p\alpha - \alpha' + q)y + (p\beta - \alpha\beta + \beta') = f,$$

и этим лемма доказана. ■

Изложим теперь алгоритм метода.

1) Решаем задачу Коши

$$\alpha' + p\alpha - \alpha^2 = q, \quad \alpha(a) = \alpha_0;$$

2) решаем задачу Коши

$$\beta' + p\beta - \alpha\beta = f, \quad \beta(a) = \beta_0;$$

3) находим числа y_1 и y_1' из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{c} y_1' + \alpha(b)y_1 = \beta(b) \\ y_1' + \alpha_1 y_1 = \beta_1 \end{array}\right\};$$

4) находим функцию $y_*(x)$ как решение задачи Коши[2]

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x), \quad y(b) = y_1.$$

Теорема. Построенная по указанному алгоритму функция $y_*(x)$ есть решение задачи (3)-(4).

[2]Эту задачу Коши нам придется решать “в обратном направлении”, двигаясь от правого конца промежутка b к левому.

Доказательство. Дифференциальному уравнению (3) функция y_* удовлетворяет ввиду леммы. Первому из условий (4) — поскольку оно эквивалентно $y'(a) + \alpha(a) = \beta(a)$. Наконец, второму из условий (4):

$$y'(b) = \beta(b) - \alpha(b)y(\beta) = \beta(b) - \alpha(b)y_1 = y_1' = \beta_1 - \alpha_1 y_1. \quad \blacksquare$$

Заметим, что дифференциальное уравнение (5) относительно α нелинейно, и его решение может не существовать на промежутке $[a, b]$. Тогда изложенный метод окажется неприменимым. Существуют варианты метода прогонки, которые позволяют избежать этой неприятности[3]. Сам термин "метод прогонки" связан с тем, что пункты 1)-2) алгоритма можно трактовать так, что мы "прогоняем" граничное условие, заданное на левом конце промежутка на правый его конец (равенство $y'(b) + \alpha y(b) = \beta(b)$ для решения уравнения (3) есть следствие граничного условия на левом конце). Можно показать, что если определитель системы уравнений 4) равен нулю, то это означает отсутствие однозначной разрешимости задачи (3)-(4) — решение либо не существует, либо их бесконечно много (в соответствии с тем, имеет ли решение система уравнений этого пункта).

В методе сведения к задачам Коши для (3)-(4) нам пришлось бы решать две задачи Коши, а в методе дифференциальной прогонки — три. Но в первом случае это задачи Коши для уравнений второго порядка, а во втором — для уравнений первого порядка.

Задача. Показать, что при решении граничной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_k' + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) y_j = f_j(x), \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$y_k(a) = y_k,\ k = 1, \ldots, m, \quad y_k(b) = y_k,\ k = m+1, \ldots, n$$

методом сведения к задачам Коши можно обойтись решением $l+1$ задачи Коши, где $l = \min\{\, m,\, n-m \,\}$.

---

[3]См., например, В.И.Крылов, В.В.Бобков, П.И.Монастырный "Вычислительные методы высшей математики", т.2, Минск, 1975.