

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ

IV семестр (2005/06 уч. г.)

Специальность *Прикладная математика и информатика*

Лектор *А. А. Лодкин*

1. Разложение функции $\operatorname{ctg} x$ в ряд.
2. Разложение функции $\sin z$ в бесконечное произведение.
3. Алгебра, σ -алгебра. Мера (определение и примеры).
4. Алгебра ячеек в \mathbb{R}^n . Системы множеств, порождающие борелевскую σ -алгебру.
5. Простейшие свойства меры.
6. Непрерывность меры снизу и сверху.
7. Теорема о стандартном продолжении меры.
8. Объём на ячейках. Определение меры Лебега.
9. Свойства меры Лебега в евклидовом пространстве. Её регулярность.
10. Измеримые функции. Их свойства.
11. Аппроксимируемость измеримой функции простыми.
12. Определение интеграла по мере.
13. Свойства интеграла от неотрицательных функций. Теорема Беппо Лёви.
14. Свойства интеграла от суммируемых функций.
15. Счетная аддитивность интеграла.
16. Абсолютная непрерывность интеграла.
17. Интеграл по дискретной мере.
18. Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега.
19. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
20. Сравнение интеграла по мере с несобственным интегралом.
21. Интеграл по мере, задаваемой плотностью.
22. Меры Лебега – Стильтеса. Интеграл по мере Лебега – Стильтеса.
23. Пример сингулярной меры.
24. Принцип Кавальери. Мера подграфика.
25. Сведение кратного интеграла к повторному.
26. Интеграл Эйлера – Пуассона.
27. Свертка суммируемых функций.
28. Простейшая замена переменной в интеграле. Сведение интеграла по мере к интегралу Лебега – Стильтеса «по распределению».
29. Инвариантность меры Лебега относительно сдвига. Измеримость образа множества при линейном отображении.
30. Постоянство коэффициента искажения меры и его вычисление для линейных отображений.
31. Мера образа измеримого множества при гладком отображении.
32. Гладкая замена переменной в интеграле.
33. Утверждения, связанные с понятием “почти всюду”.
34. Сходимость по мере и почти всюду.
35. Теорема Фату.

36. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.
37. Интеграл от комплекснозначной функции.
38. Непрерывность интеграла по параметру. Дифференцирование и интегрирование интеграла по параметру (суммируемый случай).
39. Равномерная сходимость интеграла, зависящего от параметра. Признаки равномерной сходимости.
40. Теоремы о несобственном интеграле с параметром.
41. Вычисление $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
42. Г-функция Эйлера. Ее свойства.
43. В-функция, ее вычисление.
44. Объем n -мерного шара.
45. Асимптотический метод Лапласа (наводящие соображения, лемма).
46. Метод Лапласа (две теоремы).
47. Примеры отыскания асимптотик.
48. Сохранение углов и дифференциальное условие конформности. Примеры.
49. Дробно-линейные преобразования и их свойства. Стереографическая проекция.
50. Классические односвязные области. Лемма о подгруппе группы автоморфизмов.
51. Автоморфизмы \mathbb{C} и $\overline{\mathbb{C}}$.
52. Лемма Шварца.
53. Автоморфизмы \mathbb{D} .
54. Основные понятия, связанные с плоскостью Лобачевского.

Эту программу можно взять на странице
<http://math.spbu.ru/user/analysis/members/lodkin/students.html>