Экстремальные задачи: ответы на экзаменационные вопросы

Алексей Богатов Юрий Литвинов Георгий Чернышев

31 декабря 2004 г.

Содержание

1 Линейные экстремальные задачи

1.1 Лемма об эквивалентных экстремальных задачах

Определение 1 *Две экстремальные задачи*

$$f(x) \to \inf_{x \in P}, \quad F(y) \to \inf_{y \in Q} \tag{1}$$

наз. эквивалентными, если
$\forall x \in P \quad \exists y \in Q \quad f(x) \geq F(y), \qquad \forall y \in Q \quad \exists x \in P \quad F(y) \geq f(x).$

Лемма 1 *Задачи* (1) *эквивалентны* $\iff$

$$\overbrace{\inf_{x \in P} f(x)}^{=\mu} = \overbrace{\inf_{y \in Q} F(y)}^{=\nu}; \tag{2}$$

при этом обе задачи одновременно имеют или не имеют решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\forall x \in P \quad \exists y \in Q \quad f(x) \geq F(y) \geq \nu \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \nu$$

Аналогично $\nu \geq \mu$.
Пусть x^* – оптимальный план, т.е. $f(x^*) = \mu$.

$$\exists y^* \in Q \quad f(x^*) \geq F(y^*)$$

Но $F(y^*) \geq \nu = \mu \quad \Rightarrow \quad F(y^*) = \nu \quad \Rightarrow \quad y^*$– оптимальный план.
ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.2 Примеры эквивалентных экстремальных задач

Пример 1

$$\varphi(x) := \max_{i \in 1:n} f_i(x) \to \inf_{x \in P} \tag{1}$$

$$\psi(x,t) := t \to \inf, \tag{2}$$

$$f_i(x) \le t, \quad i \in 1:n, \quad x \in P$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ (1) И (2).

$$x_0 \in P; \quad t_0 := \max_{i \in 1:n} f_i(x_0)$$

(x_0, t_0) – план (2)

$$\psi(x_0, t_0) = t_0 = \max f_i(x_0) = \varphi(x_0)$$

(x_0, t_0) – план (2) $\Rightarrow x_0 \in P$ – план (1)

$$\varphi(x_0) = \max_{i \in 1:n} f_i(x_0) \le t_0 = \psi(x_0, t_0)$$

(x_*, t_*) – оптимальный план (2) $\Rightarrow \quad t_* = \max_{i \in 1:n} f_i(x_*)$
ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

Пример 2

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| \to \inf_{x \in P} \tag{3}$$

$$\psi(x,u,v) = \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) \to \inf_{x \in P}, \tag{4}$$

$$f_i(x) = u_i - v_i, \quad u_i \ge 0, \quad v_i \ge 0, \quad i \in 1:n$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ (3) И (4).

$$a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists u, v \ge 0: \quad a = u - v, \quad |a| = u + v$$

$$u = \frac{|a| + a}{2} \ge 0, \quad v = \frac{|a| - a}{2} \ge 0$$

$x \in P$ – план (3)

$$a_i = f_i(x) = u_i - v_i, \quad |a_i| = u_i + v_i, \quad u_i, v_i \ge 0$$

(x,u,v) – план (4)

$$\psi(x,u,v) = \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| = \varphi(x)$$

(x,u,v) – план (4) $\quad \Rightarrow \quad x \in P$ – план (3)

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| = \sum_{i=1}^{m} |u_i - v_i| \le \sum_{i=1}^{m} (|u_i| + |v_i|) = \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) = \psi(x,u,v)$$

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.3 Постановка задачи линейного программирования. Сведение общей задачи линейного программирования к эквивалентной задаче линейного программирования в канонической форме

$$f(x) := c[N] \times x[N] \to \inf \tag{1}$$
$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$
$$x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1] - \text{знаковое ограничение.}$$

$N_1 \subset N, \quad M_1 \cap M_2 = \varnothing, \quad N_2 = N \setminus N_1, \quad M = M_1 \cup M_2$
$A[M, N]$
$\Omega-$множество планов.

$$\langle c, x \rangle \to \inf_{x \in \Omega}$$

Задача вида

$$f(x) = c[N] \times x[N] \to \inf \tag{2}$$
$$A[M, N] \times x[N] = b[M]$$
$$x[N] \geq \mathbb{O}[N]$$

называется *канонической задачей линейного программирования*

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \min$$
$$Ax = b$$
$$x \geq \mathbb{O}$$

Ω – множество планов (1).

$$N_2 = N \setminus N_1$$
$$x_0[N_2] = \underbrace{y_0[N_2]}_{\geq 0} - \underbrace{z_0[N_2]}_{\geq 0}$$
$$w_0[M_1] = A[M_1, N] \times x_0[N] - b[M_1]$$
$$A[M_1, N_1] \times x_0[N_1] + A[M_1, N_2] \times y_0[N_2] - A[M_1, N_2] \times z_0[N_2] - w_0[M_1] = b[M_1]$$
$$A[M_2, N_1] \times x_0[N_1] + A[M_2, N_2] \times y_0[N_2] - A[M_2, N_2] \times z_0[N_2] = b[M_2]$$
$$v_0 = (x_0[N_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$$
$$A_0 = \begin{pmatrix} A[M_1, N_1] & A[M_1, N_2] & -A[M_1, N_2] & -E[M_1, M_1] \\ A[M_2, N_1] & A[M_2, N_2] & -A[M_2, N_2] & \mathbb{O}[M_2, M_1] \end{pmatrix}$$
$$A_0 = (A[M, N_1], A[M, N_2], -A[M, N_2], -E[M, M_1])$$
$$\langle c, x_0 \rangle = c[N_1] \times x_0[N_1] + c[N_2] \times y_0[N_2] - c[N_2] \times z_0[N_2]$$

$$c_0 = (c[N_1], c[N_2], -c[N_2], \mathbb{O}[M_1])$$
$$\langle c, x_0\rangle = \langle c_0, v_0\rangle$$

$$\langle c_0, v\rangle \to \inf \qquad (3)$$
$$A_0 v = b, \quad v \geq \mathbb{O}$$

Теорема 1 (1) *и* (3) *эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
$x_0 \in \Omega \Rightarrow$ строим v_0 - план (3).
$\langle c_0, v_0\rangle = \langle c, x_0\rangle$ - значения целевой функции равны.
$v_0 = (x_0[M_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$ - план (3).
$\Rightarrow x_0 = (x_0[M_1], y_0[N_2] - z_0[N_2])$
Очевидно, что $x_0 \in \Omega$ и $\langle c, x_0\rangle = \langle c_0, v_0\rangle$
ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.4 Лемма о базисном плане

Определение 1 *План $x \in \Omega$ называется **базисным**,*
если $A_j = A[M, j], j \in N_+(x)$, линейно независимы. (столбцы A, соответствующие носителю плана x, линейно независимы). Нулевой вектор, если он является планом, будет по определению базисным.

$$A[M, N_+] \times z[N_+] = \mathbb{O}[M] \tag{1}$$

Лемма 1 *Пусть выполнено условие теоремы и $b \neq \mathbb{O}$. Тогда по любому плану $x_0 \in \Omega$ можно построить базисный план $y_0 : \langle c, x_0 \rangle \geq \langle c, y_0 \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
Возьмем $x_0 \in \Omega$. Поскольку $b \neq \mathbb{O}$, то $N_+ := N_+(x_0) \neq \varnothing$
Рассмотрим систему (1). Если она имеет только нулевое решение, то x_0 - базисный план. ($y_0 := x_0$)
Пусть (1) имеет ненулевое решение $z_0[N_+]$. Дополним $z_0[N \setminus N_+] = \mathbb{O}[N \setminus N_+]$

$$Az_0 = \mathbb{O}, \quad z_0 \neq \mathbb{O} \tag{2}$$

1. $\langle c, z_0 \rangle = 0$. Можно считать, что у z_0 есть хотя бы одна положительная компонента (иначе z_0 заменить на $-z_0$)

$$x(t) := x_0 - tz_0, \quad t > 0$$

$$Ax(t) = b = \quad \forall t > 0$$

$$= Ax_0 - t\,\underbrace{Az_0}_{=\mathbb{O}}$$

$$x(t) \geq \mathbb{O} \quad ?$$

   (a)
$$j \in N \setminus N_+ : \quad x(t)[j] = 0 \ \ \forall t$$

   (b)
$$j \in N_+, \ z_0[j] \leq 0 : \quad x_0[j] - tz_0[j] > 0 \ \ \forall t > 0$$

   (c)
$$j \in N_+, \ z_0[j] > 0 : \quad x_0[j] - tz_0[j] \geq 0 \iff t \leq \frac{x_0[j]}{z_0[j]}$$

$$t_0 := \min\left\{ \frac{x_0[j]}{z_0[j]} \;\middle|\; j \in N_+, \ z_0[j] > 0 \right\} \tag{3}$$

   j_0 – индекс, на котором достигается минимум

$$x_1 = x(t_0) = x_0 - t_0 z_0 \in \Omega,$$

$$N_+(x_1) \subsetneq N_+(x_1) \text{ (выбит индекс } j_0)$$

$$\langle c, x_1 \rangle = \langle c, x_0 \rangle - t_0 \overbrace{\langle c, z_0 \rangle}^{=0} = \langle c, x_0 \rangle$$

2.

$$\langle c, z_0\rangle \neq 0.$$

Можно считать, что $\langle c, z_0\rangle > 0$, иначе вместо z_0 возьмем $-z_0$.
Докажем, что $\exists j \mid Z_0[j] > 0$.
От противного: пусть $z_0 \leq \mathbb{O}$.

$$x(t) := x - tz_0; \quad x(t) \in \Omega \ \ \forall t > 0 \quad (Ax(t) = b, \ x(t) \geq \mathbb{O} \ \forall t > 0)$$

$$\langle c, x(t)\rangle = \langle c, x_0\rangle - t \overbrace{\langle c, z_0\rangle}^{>0} \quad \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \quad -\infty$$

Противоречие условию $\inf f(x) > -\infty$.
t_0 – по формуле (3); $x_1 = x_0 - t_0 z_0 \in \Omega, \ \ N_+(x_1) \subsetneq N_+(x_0)$.

$$\langle c, x_1\rangle = \langle c, x_0\rangle - \overbrace{t_0\langle c, z_0\rangle}^{>0} < \langle c, x_0\rangle$$

Итак, если x_0 не является базисным планом, то $\exists x_1 \in \Omega : \ N_+(x_1) \subsetneq N_+(x_0), \ \ \langle c, x_1\rangle \leq \langle c, x_0\rangle$.
x_1 – либо базисный план, либо нет; во втором случае $\exists z_1 : \quad Az_1 = \mathbb{O}, \ z_1 \neq \mathbb{O}$.
Тогда перейдем от x_1 к x_2, как выше от x_0 к x_1:

$$N_+(x_2) \subsetneq N_+(x_1), \quad \langle c, x_2\rangle \leq \langle c, x_1\rangle$$

За конечное число шагов дойдем до базисного плана y_0.

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.5 Теорема о существовании оптимального базисного плана у задачи линейного программирования в канонической форме

Теорема 1 *(о существовании решения)*
Если $\Omega \neq \varnothing$ и $\inf_{x\in\Omega} f(x) > -\infty$, то существует оптимальный базисный план.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1.
$$b = \mathbb{O} \;\Rightarrow\; \langle c, x\rangle \geq 0 \;\; \forall x \in \Omega$$
$$(\;\text{пусть } \exists x_0 :\; \langle c, x\rangle < 0, \text{ тогда}$$
$$x(t) = tx_0 \in \Omega \;\; \forall t > 0, \text{ поскольку } Ax(t) = \mathbb{O},\; x(t) \geq \mathbb{O};$$
$$\langle c, tx_0\rangle = t\langle c, x_0\rangle \xrightarrow{t\to+\infty} -\infty\;)$$

   Итак, в этом случае $x_* = 0$ – оптимальный БП.

2.
$$b \neq \mathbb{O} :$$

   Поскольку $\Omega \neq \varnothing$, существует БП y_0.
   Покажем, что базисных планов конечное число.
   Проверим, что разные БП имеют разные носители.
   От противного. Пусть $y_0 \neq y_1$ – БП, $N_+(y_0) = N_+(y_1) =: N_+$, $y_0[N_+] \neq y_1[N_+]$.

$$\sum_{j\in N_+} y_0[j]A_j = b, \quad \sum_{j\in N_+} y_1[j]A_j = b \;\Rightarrow\; \sum_{j\in N_+} (y_0[j] - y_1[j])A_j = \mathbb{O},$$

   что противоречит базисности планов y_0 и y_1.
   Итак, базисных планов конечное число. $y_1, \ldots, y_k$ – БП.
   Выберем $x_* \in \{y_1, \ldots, y_k\} :\; \langle c, x_*\rangle = \min_{j\in 0:k}\langle c, y_j\rangle$.
   Покажем, что x_* – оптимальный БП для исходной задачи.
   $\forall x \in \Omega$ по лемме $\exists$ БП $y :\; \langle c, x\rangle \geq \langle c, y\rangle \geq \langle c, x_*\rangle$.

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.6 Формулировка теоремы Фаркаша. Ее интерпретация в двумерном случае

Определение 1 $K \subset \mathbb{R}^N$ *— конус (в начале координат).*
$x \in K \Longrightarrow tx \in K \quad \forall t > 0$
K^+ *— сопряженный конус.* $K^+ = \{u \in \mathbb{R}^N \mid \langle u, x \rangle \geq 0 \; \forall x \in K\}$

Теорема 1 (теорема Фаркаша).

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle a_i, x \rangle \geq 0, \; i \in M\} \Longrightarrow K^+ = \operatorname{cone}(\{a_i\}_{i \in M}) = \{u = \sum_{i \in M} t_i a_i \mid t_i \geq 0, i \in M\}$$

Двумерный случай:

$$K : \begin{array}{l} \langle a_1, x \rangle \geq 0 \\ \langle a_2, x \rangle \geq 0 \end{array} \Rightarrow K^+ = \operatorname{cone}(a_1, a_2)$$

$$u \in K^+ : \quad u = t_1 a_1 + t_2 a_2, \; t_1, t_2 \geq 0$$

1.7 Критерий существования неотрицательного решения у системы линейных уравнений

Лемма 1

$$A = A[M, N]$$

$$Ax = b,\ x \geq 0 \tag{1}$$

(1) *совместна* $\Longleftrightarrow$

$$\langle b, u\rangle \geq 0 \quad \forall u:\ uA \geq 0 \ (\textit{или}\ A^T u\ \geq 0). \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
(1) совместна $\Longleftrightarrow$ $\sum_{j\in N} x[j]A_j = b,\ x[j] \geq 0,\ j \in N (A_j = A[M, j])$ $\Longleftrightarrow$ $b \in \underbrace{\mathrm{cone}(\{A_j\}_{j\in M})}_{\Gamma}$
Введем конус $K = \{u \in \mathbb{R}^M \mid \langle b, u\rangle \geq 0, j \in N\} = \{u \mid uA \geq 0\}$
$K^+ = \Gamma$ по теореме Фаркаша.
(1) совместна $\Longleftrightarrow$ $b \in \Gamma$ $\Longleftrightarrow$ $b \in K^+$ $\Longleftrightarrow$ $\langle b, u\rangle \geq 0\ \ \forall u \in K$,
$K = \{u \mid uA \geq 0\}$.
ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

Замечание 1 (2) $\Longleftrightarrow$

$$\langle b, u\rangle \leq 0\ \forall u : uA \leq 0. \tag{3}$$

$\Bigg($ $\Longrightarrow$: $uA \leq 0 \Longrightarrow (-u)A \geq 0 \Longrightarrow \langle(-u), b\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle u, b\rangle \leq 0.$

$\Longleftarrow$: *столь же очевидно.* $\Bigg)$

(1) *совместна* $\Longrightarrow \langle b, u\rangle \leq 0\ \forall u : uA \leq 0.$

1.8 Критерий совместности системы линейных уравнений и неравенств

Теорема 1 *Система*

$$\begin{array}{c} A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1] \end{array} \tag{1}$$

совместна $\iff \langle b, u\rangle \leq 0 \; \forall u \in \mathbb{R}^M:$

$$\begin{array}{c} U[M] \times A[M, N_1] \leq \mathbb{O}[N_1] \\ U[M] \times A[M, N_1] = \mathbb{O}[N_2] \\ U[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1] \end{array} \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
Совместность (1) эквивалентна совместности

$$A_0 = b, \; v \geq 0, \tag{3}$$

$$\text{где } A_0 = (A[M, N_1], \; A[M, N_2], \; -A[M, N_2], \; -E[M, N_2]).$$

По лемме (3) совместна $\iff \langle b, u\rangle \leq 0 \; \forall \; u: \; uA_0 \leq 0 \iff (2)$

$$U[M] \times A[M, N_1] \leq \mathbb{O}[N_1]$$

$$\left.\begin{array}{r} U[M] \times A[M, N_2] \leq \mathbb{O}[N_2] \\ -U[M] \times A[M, N_2] \leq \mathbb{O}[N_2] \end{array}\right\} \Longrightarrow U[M] \times A[M, N_2] = \mathbb{O}[N_2]$$

$$-U[M] \times E[M, M_1] \leq \mathbb{O}[M_1] \iff U[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1].$$

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

Замечание 1 (1) *несовместна* $\iff \exists u$, *удовлетворяющее* (2).

Следствие 1 (теорема Фань-Цзы).
$Ax \geq b$ *совместна* $\iff \langle b, u\rangle \leq 0$
$\forall u: \; uA = 0, \; u \geq 0 \quad (A^T u = 0, \; u \geq 0)$
Условия на множества: $M_2 = 0, \; M_1 = M, \; N_1 = 0, \; N_2 = N.$

1.9 Основная лемма линейного программирования

Лемма 1 (основная лемма ЛП)

$$\begin{cases} \langle c, x\rangle = \mu \\ Ax = b \\ x \geq \mathbb{O} \end{cases} \tag{1}$$

$$A = A[M, N]$$

Пусть система (1) *совместна, однако становится несовместной при замене* μ *на* $\mu - \lambda\ \forall\lambda > 0$. *Тогда совместна система*

$$uA \leq c, \quad \langle b, u\rangle = \mu. \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\begin{cases} \langle c, x\rangle - t\mu = -1 \\ Ax - tb = \mathbb{O} \\ x \geq \mathbb{O}, \quad t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Докажем, что система (3) несовместна.
От противного: пусть (x_0, t_0) удовлетворяет (3).

1. $$t_0 = 0. \qquad \langle c, x_0\rangle = -1,\ Ax_0 = \mathbb{O},\ x_0 \geq \mathbb{O}$$

   Пусть y_0 удовлетворяет (1). Тогда $x_1 := y_0 + x_0$.

   $$\langle c, x_1\rangle = \langle c, y_0\rangle + \langle c, x_0\rangle = \mu - 1; \quad Ax_1 = b,\ x_1 \geq \mathbb{O}$$

   Противоречие условию.

2. $$t_0 > 0. \qquad x_1 := \frac{x_0}{t_0}$$

   Пусть y_0 удовлетворяет (1). Тогда $x_1 := y_0 + x_0$.

   $$\langle c, x_1\rangle = \mu - \frac{1}{t_0}; \quad Ax_1 = b,\ x_1 \geq \mathbb{O}$$

   Противоречие условию.

Итак, система (3) несовместна.

$$\begin{array}{c|} \gamma \\ u \end{array} \quad \begin{pmatrix} -c & \mu \\ A & -b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \geq \mathbb{O},\ t \geq 0 \tag{3'}$$

$$\begin{pmatrix} -c \\ A \end{pmatrix} \times x = \begin{pmatrix} -\mu \\ b \end{pmatrix}, \quad x \geq \mathbb{O} \tag{1'}$$

$(3')$ несовместна, $(1')$ совместна.
В силу несовместности $(3')$ (см. лемму из предыдущего параграфа):

$$\exists(\gamma_0, u_0): \quad -\gamma_0 c + u_0 A \leq \mathbb{O},\ \gamma_0\mu - \langle b, u_0\rangle \leq 0,\ \gamma_0 > 0.$$

В силу совместности $(1')$ и условия $-\gamma_0 c + u_0 A \leq \mathbb{O}$:

$$-\gamma_0\mu + \langle b, u_0\rangle \leq 0.$$

Получили:

$$-\gamma_0\mu + \langle b, u_0\rangle = 0; \quad -\gamma_0 c + u_0 A \leq \mathbb{O}$$

$$u_* := \frac{u_0}{\gamma_0}; \qquad u_* A \leq c,\ \langle b, u_*\rangle = \mu$$

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.10 Критерий оптимальности для общей задачи линейного программирования

$$f(x) := c[N] \times x[N] \to \inf \tag{1}$$

$$\Omega : \begin{cases} A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ \quad x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1] \end{cases}$$

Теорема 1 (критерий оптимальности).
$x_* \in \Omega$ – *оптимальный план* (1) $\iff$ $\exists u_* = u_*[M]$:

$$\langle c, x_* \rangle = \langle b, u_* \rangle \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_*[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1] \\ u_*[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \\ \quad u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1] \end{cases} \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
Необходимость. $x_* \in \Omega$ – оптимальный план (1).
Запишем эквивалентную задачу:

$$\begin{cases} \langle c_0, v \rangle \to \inf \\ \quad A_0 v = b \\ \quad v \geq \mathbb{O} \end{cases} \tag{4}$$

По эквивалентности у (4) $\exists$ оптимальный план v_* и $\langle c, x_* \rangle = \langle c_0, v_* \rangle =: \mu$.

$$\begin{cases} \langle c_0, v \rangle = \mu \\ \quad A_0 v = b \\ \quad v \geq \mathbb{O} \end{cases} \quad -$$

эта система совместна (v_*), при уменьшении μ становится несовместной.

$$\text{По лемме } \exists u_* : \quad \underbrace{u_* A_0 \leq c_0}_{\iff (3)}, \ \underbrace{\langle b, u_* \rangle = \mu = \langle c, x_* \rangle}_{(2)}$$

$A_0 = (A[M, N_1] \quad A[M, N_2] \quad -A[M, N_2] \quad -E[M, M_1])$
$c_0 = (c[N_1] \quad c[N_2] \quad -c[N_2] \quad \mathbb{O}[M_1])$
$u_* A_0 \leq c_0$:

$$u_*[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1]$$

$$\left.\begin{array}{r} u_*[M] \times A[M, N_2] \leq c[N_2] \\ -u_*[M] \times A[M, N_2] \leq -c[N_2] \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_*[M] \times A[M, N_2] = c[N_2]$$

$$-u_*[M] \times E[M, M_1] \leq \mathbb{O}[M_1] \quad \iff \quad u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$$

Достаточность. Выполнены (2), (3).

$$\forall x \in \Omega \quad \langle c, x \rangle \ = \ c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \times x[N_2] \ \overset{(3)}{\geq}$$

$$\geq \; u_*[M]\times A[M,N_1]\times x[N_1]+u_*[M]\times A[M,N_2]\times x[N_2] \; = \; u_*[M]\times(A[M,N]\times x[N]) =$$
$$= u_*[M_1] \times (A[M_1,N] \times x[N]) + u_*[M_2] \times (A[M_2,N] \times x[N]) \; \geq$$
$$\geq \; u_*[M_1] \times b[M_1] + u_*[M_2] \times b[M_2] \; = \; \langle b, u_* \rangle \overset{(2)}{=} \langle c, x_* \rangle$$

Итак, $\forall x \in \Omega \quad \langle c, x_* \rangle \leq \langle c, x \rangle$.
ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.11 Первая теорема двойственности в линейном программировании

$$f(x) := \langle c, x\rangle \to \inf_{x\in\Omega} \tag{1}$$

$$g(u) := \langle b, u\rangle \to \sup_{u\in\Lambda} \tag{2}$$

В силу критерия оптимальности по решению x_* задачи (1) найдется u_* – решение задачи (2);
более того,

$$\inf_{x\in\Omega} f(x) = \sup_{u\in\Lambda} g(u) \tag{3}$$

Определение 1 (2) *называется задачей,* ***двойственной*** *к* (1).

Подробнее:

$$g(u) := b[M] \times u[M] \to \sup$$

$$\left.\begin{array}{c} u[M] \times A[M, N_1] \le c[N_1] \\ u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \\ u[M_1] \ge \mathbb{O}[M_1] \end{array}\right\} \tag{2'}$$

(2) [(2′)] имеет решение u_*. Покажем, что (1) имеет решение и выполняется (3) – соотношение двойственности. u_* является решением следующей задачи:

$$-\langle b, u\rangle \to \inf$$

$$-A^T[N_1, M] \times u[M] \ge -c[N_1]$$

$$-A^T[N_2, M] \times u[M] = -c[N_2]$$

$$u[M_1] \ge \mathbb{O}[M_1]$$

По критерию оптимальности $\exists x_* = x_*[N]$:

$$-\langle b, u_*\rangle = -\langle c, x_*\rangle$$

$$-x_*[N] \times A^T[N, M_1] \le -b[M_1]$$

$$-x_*[N] \times A^T[N, M_2] = -b[M_2]$$

$$x_*[N_1] \ge \mathbb{O}[N_1]$$

$$\Downarrow$$

$$\langle b, u_*\rangle = \langle c, x_*\rangle$$

$$A[M_1, N] \times x_*[N] \ge b[M_1]$$

$$A[M_2, N] \times x_*[N] = b[M_2]$$

$$x_*[N_1] \ge \mathbb{O}[N_1]$$

$$x_* \in \Omega, \quad u_* \in \Lambda, \quad \langle c, x_*\rangle = \langle b, u_*\rangle$$

По критерию оптимальности для (1) x – оптимальный план и выполняется (3).

Таким образом, нами доказана

Теорема 1 (I теорема двойственности)
Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая имеет решение; при этом выполняется (3).

1.12 Критерий совместной разрешимости пары двойственных задач линейного программирования

$$f(x) := \langle c, x \rangle \to \inf_{x \in \Omega} \tag{1}$$

$$g(u) := \langle b, u \rangle \to \sup_{u \in \Lambda} \tag{2}$$

Теорема 1 *Обе двойственные задачи* (1) *и* (2) *одновременно имеют решение* $\iff$ $\Omega \neq \varnothing$ *и* $\Lambda \neq \varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ
$\Omega \neq \varnothing$ по условию
$\Lambda \neq \varnothing$ $\quad \exists$ план u_0 задачи (2).

$$f(x) \geq g(u_0) \quad \forall x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \inf_{x \in \Omega} f(x) > -\infty.$$

По теореме существования $\exists$ оптимальный план задачи (1).
По первой теореме двойственности (2) тоже имеет решение.
ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.13 Вторая теорема двойственности в линейном программировании

$$f(x) := \langle c, x \rangle \to \inf_{x \in \Omega} \tag{1}$$

$$g(u) := \langle b, u \rangle \to \sup_{u \in \Lambda} \tag{2}$$

Теорема 1 (II теорема двойственности)
$x_0,\ u_0$ – планы двойственных задач.
$x_0,\ u_0$ оптимальны $\iff$ выполняются условия дополнительности:

$$\langle u_0, Ax_0 - b \rangle = 0 \tag{3}$$

$$\langle c - u_0 A, x_0 \rangle = 0 \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
Необходимость.

$$\langle c, x_0 \rangle \overset{N=N_1 \cup N_2}{\geq} \langle u_0 A, x_0 \rangle = \langle u_0, Ax_0 \rangle \overset{M=M_1 \cup M_2}{\geq} \langle u_0, b \rangle$$

$x_0,\ u_0$ оптимальны $\Rightarrow \quad \langle c, x_0 \rangle = \langle b, u_0 \rangle$
Достаточность.
Следует из критерия оптимальности для (1) и первой теоремы двойственности.
ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

(3), (4) эквивалентны соответственно

$$u_0[i] \times (A[i,N] \times x_0[N] - b[i]) = 0, \quad i \in M_1 \tag{4'}$$

$$(c[j] - u_0[M] \times A[M,j]) \times x_0[j] = 0, \quad j \in N_1, \tag{5'}$$

так как

$$(3) \iff \sum_{i \in M_1} u_0[i] \times (A[i,N] \times x_0[N] - b[i]) = 0 \Rightarrow \text{все слагаемые равны.}$$

$(4'),\ (5') \iff$

$$\iff u_0[M] \times A[M,j] = c[j], \quad \text{если } x_0[j] > 0 \ (j \in N_1)$$

$$u_0[i] = 0, \quad \text{если } A[i,N] \times x_0[N] > b[i] \ (i \in M_1)$$

С другой стороны, $(4'),\ (5') \iff$

$$\iff A[i,N] \times x_0[N] = b[i], \quad \text{если } u_0[j] > 0 \ (i \in M_1)$$

$$x_0[j] = 0, \quad \text{если } u_0[M] \times A[M,j] < c[j] \ (j \in N_1)$$

1.14 Постановка задачи о матричных играх. Лемма об очистке

$A = A[M, N]$ – матрица платежей
Стратегия I игрока: $p = p[M]: \quad \sum_{i\in M} p[i] = 1,\ p[i] \geq 0,\ i \in M$
P – множество стратегий I игрока
Стратегия II игрока: $q = q[N]: \quad \sum_{j\in N} q[j] = 1,\ q[j] \geq 0,\ j \in N$
Q – множество стратегий II игрока
Определим $a(p, q)$ – среднюю величину платежа в каждой партии.
В случае $p = e_i,\ \ q = e_j \quad a(e_i, e_j) = A[i, j]$

$$a(e_i, q) = \sum_{j\in N} A[i, j] \times q[j]$$

$$a(p, e_j) = \sum_{i\in M} p[i] \times A[i, j]$$

$$a(p, q) = \sum_{j\in N} (p[M] \times A[M, j]) \times q[j] = p[M] \times A[M, N] \times q[N]$$

Фиксируем p. $\qquad \varphi(p) = \min_{q\in Q} a(p, q)$ – гарантированный выигрыш.

I игрок выбирает $p_* \in P$:

$$\varphi(p_*) = \max_{p\in P} \varphi(p) = \max_{p\in P} \min_{q\in Q} a(p, q) \tag{1}$$

Фиксируем q. $\qquad \psi(q) = \max_{p\in P} a(p, q)$.

II игрок выбирает $q_* \in Q$:

$$\psi(q_*) = \min_{q\in Q} \psi(q) = \min_{q\in Q} \max_{p\in P} a(p, q) \tag{2}$$

Лемма 1 (лемма об очистке). *Справедливы равенства*

$$\varphi(p) = \min_{j\in N} p[M] \times A[M, j] \ \ \forall p \in P \tag{3}$$

$$\psi(q) = \max_{i\in M} A[i, N] \times q[N] \ \ \forall q \in Q \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\varphi(p) \qquad\qquad a(p, q) \to \inf_{q\in Q}$$

p фиксировали

$$(p[M] \times A[M, N]) \times q[N] \to \inf$$
$$\sum_{j\in N} q[j] = 1$$

$$q[N] \geq \mathbb{O}[N]$$

Решение существует в силу ограниченности множества планов.
По теореме о существовании решения найдется оптимальный **базисный** план.
Все множество базисных планов: $\{e_j\}, \quad j \in N$.

$$\varphi(p) = \min_{j \in N} a(p, e_j) = \min_{j \in N} p[M] \times A[M, j].$$

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.15 Теорема о существовании ситуации равновесия в матричных играх

$A = A[M, N]$ – матрица платежей
Стратегия I игрока: $p = p[M]: \quad \sum_{i\in M} p[i] = 1,\ p[i] \geq 0,\ i \in M$
P – множество стратегий I игрока
Стратегия II игрока: $q = q[N]: \quad \sum_{j\in N} q[j] = 1,\ q[j] \geq 0,\ j \in N$
Q – множество стратегий II игрока
Определим $a(p, q)$ – среднюю величину платежа в каждой партии.

$$a(p, q) = \sum_{j\in N} (p[M] \times A[M, j]) \times q[j] = p[M] \times A[M, N] \times q[N]$$

Фиксируем p. $\qquad \varphi(p) = \min_{q\in Q} a(p, q)$ – гарантированный выигрыш.

I игрок выбирает $p_* \in P$:

$$\varphi(p_*) = \max_{p\in P} \varphi(p) = \max_{p\in P} \min_{q\in Q} a(p, q) \tag{1}$$

Фиксируем q. $\qquad \psi(q) = \max_{p\in P} a(p, q)$.

II игрок выбирает $q_* \in Q$:

$$\psi(q_*) = \min_{q\in Q} \psi(q) = \min_{q\in Q} \max_{p\in P} a(p, q) \tag{2}$$

Теорема 1 (о существовании ситуации равновесия).
Стратегии p_*, q_* существуют.
При этом пара $\{p_*, q_*\}$ образует ситуацию равновесия:

$$a(p, q_*) \leq a(p_*, q_*) \leq a(p_*, q) \qquad \forall p \in P \ \ \forall q \in Q \tag{3}$$

Задача для I игрока:

$$\varphi(p) = \min_{j\in N} \underbrace{p[M] \times A[M, j]}_{t} \to \sup_{p\in P} \tag{4}$$

$$\psi(q) = \max_{i\in M} \underbrace{A[i, N] \times q[N]}_{s} \to \inf_{q\in Q} \tag{5}$$

(4) эквивалентна

$$t \to \sup \tag{6}$$

$$-p[M] \times A[M, j] + t \leq 0, \quad j \in N$$

$$\sum_{i\in M} p[i] = 1$$

$$p[M] \geq \mathbb{O}[M]$$

(p, t)

(5) эквивалентна

$$
\begin{gathered}
s \to \inf \qquad (7)\\
-A[i,N] \times q[N] + s \geq 0, \quad i \in M\\
\sum_{j \in N} q[j] = 1\\
q[N] \geq \mathbb{O}[N]
\end{gathered}
$$

(q, s)

(6) и (7) – двойственные задачи:
(7):

$$
\begin{array}{r|cccc|c}
 & 0 & \dots & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & 1 & 0\\
p[M] & & -A[M,N] & & \vdots & \vdots\\
 & & & & 1 & 0\\
t & 1 & \dots & 1 & 0 & 1\\
\hline
\end{array}
$$

$$q[N] \geq \mathbb{O}[N]$$

Множества планов у (6) и (7) непусты (из-за произвольности t и s)
$\exists\,(p^*, t^*),\ (q^*, s^*)$ – оптимальные; $t^* = s^*$ по первой теореме двойственности
В силу эквивалентности

$$\begin{matrix} t^* = \varphi(p^*) \\ s^* = \psi(q^*) \end{matrix} \ \Rightarrow\ \varphi(p^*) = \psi(q^*) \qquad (8)$$

(8) $\iff$

$$\min_{q \in Q} a(p^*, q) = \max_{p \in P} a(p, q*) \qquad (9)$$

$$
\begin{gathered}
a(p^*, q^*) \leq \max_{p \in P} a(p, q*) \overset{(9)}{=} \min_{q \in Q} a(p^*, q) \leq a(p^*, q^*) \ \Rightarrow\\
\Rightarrow \quad \max_{p \in P} a(p, q*) = a(p^*, q^*) = \min_{q \in Q} a(p^*, q) \quad \Rightarrow\\
\Rightarrow \quad a(p, q*) \leq a(p^*, q^*) \leq a(p^*, q)
\end{gathered}
$$

Этим мы доказали теорему о существовании равновесия.

1.16 Анализ двойственной задачи к линейной дискретной задаче оптимального управления

$$\sum_{k=1}^{s}\langle c_k, x_k\rangle + \sum_{k=1}^{s}\langle b_k, u_k\rangle \to \sup \tag{1}$$

$$p_k \;\Big|\quad x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_k u_k, \quad k \in 1:s \tag{2}$$

$$q_k \;\Big|\quad D_k u_k \le d_k, \quad k \in 1:s \tag{3}$$

$$x_0 = \hat{x} \tag{4}$$

$$A_k = A_k[N,N], \quad B_k = B_k[N,M], \quad D_k = D_k[T,M]$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc|c}
 & u_1 & x_1 & u_2 & x_2 & u_3 & x_3 & \dots & x_{s-1} & u_s & x_s & \\
\hline\hline
 & b_1 & c_1 & b_2 & c_2 & b_3 & c_3 & \dots & c_{s-1} & b_s & c_s & \\
\hline
p_1 & -B_1 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & A_0\hat{x} \\
q_1 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \le d_1 \\
p_2 & 0 & -A_1 & -B_2 & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & = 0 \\
q_2 & 0 & 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \le d_2 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & -A_2 & -B_3 & E & \dots & 0 & 0 & 0 & = 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots \\
p_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -A_{s-1} & -B_s & E & = 0 \\
q_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D_s & 0 & \le d_s
\end{array}$$

$$\langle A_0\hat{x}, p_1\rangle + \sum_{k=1}^{s}\langle d_k, q_k\rangle \to \inf \tag{5}$$

$$-p_k B_k + q_k D_k = b_k, \quad k \in 1:s$$

$$p_k - p_{k+1}A_k = c_k, \quad k \in 1:s-1$$

$$p_s = c_s$$

$$q_k \ge \mathbb{O}, \quad k \in 1:s$$

$$\left.\begin{array}{r} p_k = p_{k+1}A_k + c_k, \quad k = s-1,\dots,1 \\ p_s = c_s \end{array}\right\} \tag{6}$$

(6): по предыдущим координатам однозначно определяется p_k

$$(5) \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{s}\langle d_k, q_k\rangle \to \inf$$

$$D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k, \quad k \in 1:s$$

$$q_k \ge \mathbb{O}, \quad k \in 1:s$$

(5) распадается на s независимых задач ЛП:

$$\langle d_k, q_k \rangle \to \inf \tag{7}$$

$$u_k \quad \Big| \quad D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k$$

$$q_k \geq \mathbb{O}$$

Двойственная задача:

$$H_k(u_k) = \langle B_k^T p_k + b_k, u_k \rangle \to \sup \tag{8}$$

$$U_k : \quad D_k u_k \leq d_k$$

(U_k – множество планов (8))
$H_k(u_k) = \langle b_k, u_k \rangle + \langle p_k, B_k u_k \rangle$ – функция Гамильтона

1.17 Принцип максимума для линейных дискретных систем

$$\sum_{k=1}^{s}\langle c_k, x_k\rangle + \sum_{k=1}^{s}\langle b_k, u_k\rangle \to \sup \tag{1}$$

$$p_k \;\Big|\quad x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_k u_k, \quad k \in 1:s \tag{2}$$

$$q_k \;\Big|\quad D_k u_k \le d_k, \quad k \in 1:s \tag{3}$$

$$x_0 = \hat{x} \tag{4}$$

$$A_k = A_k[N,N], \quad B_k = B_k[N,M], \quad D_k = D_k[T,M]$$

$$\langle A_0\hat{x}, p_1\rangle + \sum_{k=1}^{s}\langle d_k, q_k\rangle \to \inf \tag{5}$$

(5) распадается на s независимых задач ЛП:

$$\langle d_k, q_k\rangle \to \inf \tag{6}$$

$$u_k \;\Big|\quad D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k$$

$$q_k \ge \mathbb{O}$$

Двойственная задача:

$$H_k(u_k) = \langle B_k^T p_k + b_k, u_k\rangle \to \sup \tag{7}$$

$$U_k: \quad D_k u_k \le d_k$$

(U_k – множество планов (7))
$H_k(u_k) = \langle b_k, u_k\rangle + \langle p_k, B_k u_k\rangle$ – функция Гамильтона

Теорема 1 (принцип максимума)
$\{u_k^*\}_{k=1}^{s}$ *– система допустимых управлений для* (1).
$\{u_k^*\}_{k=1}^{s}$ *оптимальна* $\iff$ $H_k(u_k^*) = \max_{u_k \in U_k} H_k(u_k)$ *при* $k \in 1:s$.
Переформулировка: u_k^* *– решение* (7).

[

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_k u_k \tag{8}$$

$$D_k u_k \le d_k, \quad k \in 1:s$$

Ограничения двойственной задачи:

$$D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k, \quad q_k \ge \mathbb{O}, \quad k \in 1:s \tag{9}$$

$$p_k = p_{k+1}A_k + c_k, \quad k \in 1:s-1$$

$$p_s = c_s$$

Серия задач при каждом $k \in 1:s$

$$\langle d_k, q_k \rangle \to \inf \tag{10}$$

$$D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k$$

$$q_k \geq \mathbb{O}$$

$$\left\langle B_k^T p_k + b_k, u_k \right\rangle \to \sup \tag{11}$$

$$D_k u_k \leq d_k$$

]

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (теоремы о принципе максимума)
$\Rightarrow$: $\{x_k^*, u_k^*\}_{k=1}^s$ — оптимальный план задачи (8). По I теореме двойственности $\exists$ решение $\{p_k, q_k^*\}$ задачи (9), по II теореме двойственности выполняется условие дополнительности.

$$\langle d_k - D_k u_k^*, q_k^* \rangle = 0 \quad \forall k \in 1:s$$

Фиксируем $k \in 1:s \Rightarrow q_k^*$ — план (10), u_k^* — план (11) и для них выполняется условие дополнительности:

$$\langle d_k - D_k u_k^*, q_k^* \rangle = 0$$

сл., по II теореме двойственности u_k^* — решение задачи (11).
$\Leftarrow$: Фиксируем $\forall k$. $\exists u_k^*$ — решение (11). Покажем, что система $\{u_k^*\}$ — оптимальное управление (8).
u_k^* по I теореме двойственности $\exists q_k^*$ — решение (10), $\{p_k, q_k^*\}$ — план двойственной задачи (9), $\{x_k^*, u_k^*\}_{k=1}^s$ — план (8). Поскольку $\forall k$ выполняется условие дополнительности для задачи (9), указанный план является оптимальным, т.е. $\{u_k^*\}$ оптимальна
ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

1.18 Симплекс-метод

1.19 Пересчет обратной базисной матрицы и двойственного вектора

1.20 Вычислительная схема симплекс-метода

2 Нелинейные экстремальные задачи

2.1 Необходимые условия оптимальности для задачи нелинейного программирования с линейными ограничениями

2.2 Теорема Лагранжа и теорема Куна–Таккера для экстремальных задач с линейными ограничениями

2.3 Критерий выпуклости для дифференцируемых функций

2.4 Критерий выпуклости для квадратичной функции

2.5 Критерий оптимальности для задачи нелинейного программирования с выпуклой дифференцируемой целевой функцией и линейными ограничениями. Частные случаи

2.6 Проектирование точки на подпространство

2.7 Свойства матрицы ортогонального проектирования

2.8 Проектирование точки на стандартный симплекс

2.9 Квадратичное программирование

2.10 Теорема существования для задачи квадратичного программирования

2.11 Основная лемма нелинейного программирования

2.12 Теорема Куна–Таккера в дифференциальной форме

2.13 Пример задачи нелинейного программирования, в единственном решении которой не выполняется условие Куна–Таккера

2.14 Теорема о достаточности условий Куна–Таккера. Пример

2.15 Достаточное условие оптимальности второго порядка в задаче нелинейного программирования

2.16 Необходимое условие оптимальности второго порядка в задаче нелинейного программирования

2.17 Пример на использование условий оптимальности второго порядка в задаче нелинейного программирования

3 Вариационное исчисление

3.1 Основная лемма вариационного исчисления

3.2 Квадратичная вариационная задача. Критерий оптимальности

3.3 Необходимое условие Лежандра неотрицательной определенности интегральной квадратичной формы

3.4 Критерий неотрицательной определенности интегральной квадратичной формы. Доказательство достаточности

3.5 Лемма о скруглении углов

3.6 Критерий неотрицательной определенности интегральной квадратичной формы. Доказательство необходимости

3.7 Критерий положительной определенности интегральной квадратичной формы

3.8 Оценка снизу для положительно определенной интегральной квадратичной формы

subsection Описание всего множества решений квадратичной вариационной задачи

3.9 Схема решения квадратичной вариационной задачи. Пример

3.10 Нелинейная вариационная задача. Конечномерная аппроксимация. Уравнение Эйлера

3.11 Естественная область определения интегрального функционала. Ее открытость в пространстве непрерывно дифференцируемых функций

3.12 Первый дифференциал интегрального функционала

3.13 Второй дифференциал интегрального функционала

3.14 Необходимые условия локального минимума первого порядка в нелинейной вариационной задаче

3.15 Теорема о существовании и непрерывности второй производной у экстремали нелинейной вариационной задачи

3.16 Необходимые условия локального минимума второго порядка в нелинейной вариационной задаче

3.17 Достаточные условия строгого локального минимума в нелинейной вариационной задаче

3.18 Параметрический метод построения главного решения уравнения Якоби. Пример

3.19 Формализация задачи о брахистохроне

3.20 Решение задачи о брахистохроне

3.21 Минимальная поверхность вращения

3.22 Изопериметрическая задача

3.23 Цепная линия