ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

А. А. ЛОДКИН

Цель настоящего пособия — описать инвариантную (бескоординатную) технику дифференцирования векторных полей, если они заданы также инвариантным образом, обсудить физический смысл дифференциальных операций и рассмотреть некоторые примеры.

1. Обозначения

Жирным шрифтом будем обозначать векторы в $\mathbb{R}^3$. *Например,*

> $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ — *текущая переменная (обычно — аргумент скалярной или векторной функции, заданной в некоторой области пространства* $G \subset \mathbb{R}^3$*).*
> $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) = (P, Q, R)$ — *векторное поле в* G*, то есть отображение из* G *в* $\mathbb{R}^3$*.*
> $\boldsymbol{h} = d\boldsymbol{r} = (h_1, h_2, h_3) = (dr_1, dr_2, dr_3)$ — *приращение (дифференциал) текущей переменной.*

$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — *скалярное произведение векторов.Скалярные поля, то есть вещественные или комплекснозначные функции, заданные в* G*, будут обозначаться обычным шрифтом. Все поля в этом тексте будут предполагаться гладкими.*

2. Основная техника

Рассмотрим классические дифференциальные операторы *градиента, ротора (вихря) и дивергенции*

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Их можно записать в более компактном виде, используя дифференциальный оператор *набла*

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3).$$

Если к нему относиться (чисто формально) как к вектору, то, умножая этот вектор на скаляр f или рассматривая его произведение (векторное или скалярное) на вектор $\boldsymbol{F}$, мы получим перечисленные выше операторы:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} f &= (\partial_1 f,\, \partial_2 f,\, \partial_3 f) = \operatorname{grad} f,\\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} &= (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2,\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3,\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F},\\
\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{F} \rangle &= \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 = \operatorname{div} \boldsymbol{F}.
\end{aligned}$$

Имеется известное противоречие между координатным классическим определением этих дифференциальных операторов и необходимостью на практике применять их к полям, заданным в бескоординатной форме (например, к полю, заданному формулой $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{|\,\boldsymbol{r}|^3}$, где $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ — некоторый постоянный вектор). Естественно ожидать, что не только результат вычисления может быть записан без привлечения координат x, y, z, но и само вычисление рассматриваемых операторов может, как правило, проводиться в векторной форме.

Инвариантность дивергенции и вихря относительно замены переменных означает следующее. Пусть $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — гладкое обратимое отображение, а $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \Psi \circ \boldsymbol{F} \circ \Psi^{-1}$ — векторное поле в области $\widetilde{G} = \Psi(G)$. Перейдем к новым координатам $\widetilde{\boldsymbol{r}} = \Psi(\boldsymbol{r})$ для записи как аргумента, так и значения векторного поля. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{F}}(\widetilde{\boldsymbol{r}}) &= \operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}),\\
\operatorname{rot} \widetilde{\boldsymbol{F}}(\widetilde{\boldsymbol{r}}) &= \Psi(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})).
\end{aligned}$$

Эти свойства можно доказать с помощью теории дифференциальных форм, однако в случае дивергенции имеется и совсем простое объяснение.

Воспользуемся тем, что $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ есть след $\operatorname{tr}(\boldsymbol{F}')$ матрицы

$$\boldsymbol{F}' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{F}} = \operatorname{tr}((\Psi \circ \boldsymbol{F} \circ \Psi^{-1})') = \operatorname{tr}(\Psi' \boldsymbol{F}' (\Psi')^{-1}).$$

Поскольку подобные матрицы имеют одинаковые следы,

$$\operatorname{tr}(\Psi' \boldsymbol{F}' (\Psi')^{-1}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{F}'.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{F}} = \operatorname{div} \boldsymbol{F}.$$

Правила, которые мы собираемся сформулировать[1], основаны на следующем утверждении.

[1]Идея описываемой техники принадлежит В. И. Полищуку

Теорема 1 (Правила дифференцирования)**.** *Пусть $\boldsymbol{F}$ — гладкое поле, $d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}}$ — его дифференциал в точке $\boldsymbol{r} \in G$ (то есть линейное отображение $\boldsymbol{h} = d\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \mapsto d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^3$). Тогда*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{div} d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}} \tag{2}$$

(правая часть постоянна по переменной $\boldsymbol{h}$ и поэтому мы эту переменную опускаем).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}) = (\Phi_1(\boldsymbol{h}), \Phi_2(\boldsymbol{h}), \Phi_3(\boldsymbol{h})) = d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{h})$, $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\boldsymbol{h}) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\boldsymbol{r})h_1 + \frac{\partial P}{\partial y}(\boldsymbol{r})h_2 + \frac{\partial P}{\partial z}(\boldsymbol{r})h_3 \right), \\
\Phi_2(\boldsymbol{h}) &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\boldsymbol{r})h_1 + \frac{\partial Q}{\partial y}(\boldsymbol{r})h_2 + \frac{\partial Q}{\partial z}(\boldsymbol{r})h_3 \right), \\
\Phi_3(\boldsymbol{h}) &= \left(\frac{\partial R}{\partial x}(\boldsymbol{r})h_1 + \frac{\partial R}{\partial y}(\boldsymbol{r})h_2 + \frac{\partial R}{\partial z}(\boldsymbol{r})h_3 \right).
\end{aligned}$$

Утверждение теоремы следует из того, что матрица Якоби $\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{h})$ отображения $\boldsymbol{\Phi}$ в любой точке $\boldsymbol{h}$ совпадает с матрицей Якоби $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})$, а ротор и дивергенция рассматриваемых отображений выражаются через элементы этих матриц. Например, мы имеем равенства

$$\begin{aligned}
\partial_2\Phi_3(\boldsymbol{h}) - \partial_3\Phi_2(\boldsymbol{h}) &= \frac{\partial R}{\partial y}(\boldsymbol{r}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\boldsymbol{r}), \\
\partial_3\Phi_1(\boldsymbol{h}) - \partial_1\Phi_3(\boldsymbol{h}) &= \frac{\partial P}{\partial z}(\boldsymbol{r}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\boldsymbol{r}), \\
\partial_1\Phi_2(\boldsymbol{h}) - \partial_2\Phi_1(\boldsymbol{h}) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\boldsymbol{r}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\boldsymbol{r}),
\end{aligned}$$

влекущие формулу (1). □

По доказанной теореме отыскание ротора и дивергенции гладкого поля сводится к отысканию ротора и дивергенции дифференциала, то есть линейного поля.

Теперь покажем, как дифференцировать линейные поля. Сначала рассмотрим поля, чаще всего встречающихся на практике.

Теорема 2 (Таблица производных)**.** *Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^3$. Следующая таблица дает значения простейших линейных полей $\boldsymbol{F}$.*

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$	$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$	$\operatorname{div} \boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{r}$	0	3
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$	$2\boldsymbol{a}$	0
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r} \rangle \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$	$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$

Доказательство. Проверяется непосредственно. Например, поле $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}\rangle\, \boldsymbol{b}$ в координатной форме выглядит так:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3)(b_1, b_2, b_3) = \\ = ((a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3)b_1, (a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3)b_2, (a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3)b_3) = \\ = (F_1(\boldsymbol{r}), F_2(\boldsymbol{r}), F_3(\boldsymbol{r})),\end{gathered}$$

откуда $\dfrac{\partial F_i}{\partial r_j} = a_jb_i,\ \ i, j \in \{1, 2, 3\}$. Дальнейшее очевидно. □

Заметим, что формулы из этой таблицы в принципе обслуживают **все** линейные поля, так как a) дифференциальные операторы линейны и b) произвольное линейное поле представимо в виде линейной комбинации полей вида $\boldsymbol{r} \mapsto \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}\rangle\, \boldsymbol{b}$.

Теоремы 1 и 2 подсказывают следующий алгоритм вычисления ротора (дивергенции) нелинейных полей.

Шаг 1: линеаризуем поле $\boldsymbol{F}$, переходя к его дифференциалу $d\boldsymbol{F}$;
Шаг 2: вычисляем ротор (дивергенцию) $d\boldsymbol{F}$ с помощью таблицы производных.

Проиллюстрируем алгоритм рядом примеров.

Пример 1. Пусть $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{|\,\boldsymbol{r}|^3}$. Сначала вычислим дифференциал $d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}}$ пользуясь правилом Лейбница, которое в векторной ситуации расщепляется в четыре разных правила:

$$\begin{gathered}d(fg) = (df)g + fdg; \\ d(f\boldsymbol{F}) = (df)\boldsymbol{F} + fd\boldsymbol{F}; \\ d\langle \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2\rangle = \langle d\boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2\rangle + \langle \boldsymbol{F}_1,\, d\boldsymbol{F}_2\rangle; \\ d(\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) = d\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_1 \times d\boldsymbol{F}_2.\end{gathered}$$

Обозначим для краткости $|\,\boldsymbol{r}|^3$ через ρ. В нашем случае получается следующее.

$$\begin{gathered}d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}} = d\left(\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{\rho^3}\right) = d(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\frac{1}{\rho^3} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\, d\left(\frac{1}{\rho^3}\right) = \\ = (\boldsymbol{a} \times d\boldsymbol{r})\frac{1}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^4}\, d(\rho)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}).\end{gathered}$$

Подсчитав отдельно дифференциал модуля

$$d(\rho) = d\sqrt{\langle \boldsymbol{r},\, \boldsymbol{r}\rangle} = \frac{1}{2\sqrt{\langle \boldsymbol{r},\, \boldsymbol{r}\rangle}}\, d\langle \boldsymbol{r},\, \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\langle \boldsymbol{r},\, \boldsymbol{r}\rangle}}(\langle d\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{r}\rangle + \langle \boldsymbol{r},\, d\boldsymbol{r}\rangle) = \frac{1}{\rho}\langle \boldsymbol{r},\, d\boldsymbol{r}\rangle, \quad (3)$$

мы окончательно получаем:

$$d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}}(d\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\rho^3}\, \boldsymbol{a} \times d\boldsymbol{r} - \frac{1}{\rho^5}\, \langle 3\boldsymbol{r},\, d\boldsymbol{r}\rangle\, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}).$$

Напомним, что при вычислении ротора и дивергенции от дифференциала мы должны считать его аргументом $d\boldsymbol{r}$, а $\boldsymbol{r}$ — константой. Тогда, согласно второй строке таблицы производных,

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\rho^3} (\boldsymbol{a} \times d\boldsymbol{r}) = \frac{2}{\rho^3}\, \boldsymbol{a},$$
$$\operatorname{div} \frac{1}{\rho^3}\ (\boldsymbol{a} \times d\boldsymbol{r}) = 0.$$

Третья строка таблицы полезна для применения наших дифференциальных операторов ко второму слагаемому:

$$\operatorname{rot} \frac{3}{\rho^5}\ \langle \boldsymbol{r},\, d\boldsymbol{r}\rangle\, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = \frac{3}{\rho^5}\, \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) =$$
$$= \frac{3}{\rho^5}\ (\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}\rangle \boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{r}) = \frac{3}{\rho^3}\, \boldsymbol{a} - \frac{3\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}\rangle}{\rho^5}\, \boldsymbol{r},$$
$$\operatorname{div} \frac{3}{\rho^5} \langle \boldsymbol{r},\, d\boldsymbol{r}\rangle\, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = \frac{3}{\rho^5} \langle \boldsymbol{r},\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}\rangle = 0.$$

Окончательный ответ:

$$\operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{\rho^3} = -\frac{1}{\rho^3}\, \boldsymbol{a} + \frac{3\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}\rangle}{\rho^5}\, \boldsymbol{r},$$
$$\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{\rho^3} = 0.$$

Пример 2. Рассмотрим *центральное поле*, то есть поле вида $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \varphi(\rho)\, \boldsymbol{r}$, где $\rho = |\,\boldsymbol{r}|$, в области $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Такое поле постоянно по абсолютной величине на сферах $\rho = \mathrm{const}$. Допустим, что функция φ гладкая. Поставим вопрос следующим образом:

1) вычислить ротор и дивергенцию поля;
2) определить, при каких условиях поле окажется *бездивергентным* (то есть когда $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$).

Как и в предыдущем примере, сначала вычислим дифференциал.

$$d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}} = \varphi'(\rho)\, d\rho\, \boldsymbol{r} + \varphi(\rho)\, d\boldsymbol{r}$$

что, с учетом формулы (3) на стр. 4, превращается в

$$d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \langle \boldsymbol{r},\, d\boldsymbol{r}\rangle\, \boldsymbol{r} + \varphi(\rho)\, d\boldsymbol{r}.$$

Применяя третье и первое правила из теоремы 2, мы получим

$$\operatorname{rot} d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0,$$
$$\operatorname{div} d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\, \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}\rangle + 3\varphi(\rho) = \rho\varphi'(\rho) + 3\varphi(\rho).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0,\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \rho\varphi'(\rho) + 3\varphi(\rho).\end{aligned}$$

Отвечая на второй вопрос, приравняем $\operatorname{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ к нулю. Тогда получим дифференциальное уравнение

$$\rho\varphi'(\rho) = -3\varphi(\rho),$$

или

$$\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} = -\frac{3}{\rho},$$

общим решением которого являются функции

$$\varphi(\rho) = \frac{C}{\rho^3} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Таким образом, центральное бездивергентное поле имеет вид

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{C\boldsymbol{r}}{\rho^3}. \tag{4}$$

3. Немного физики

Напомним физический смысл ротора и дивергенции. Вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ характеризует *закрученность* поля $\boldsymbol{F}$ в точке $\boldsymbol{r}$ пространства. Например, если $\boldsymbol{F}$ есть поле скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг начала координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$. В этом случае $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \equiv 2\boldsymbol{\omega}$.

Величина $\operatorname{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ характеризует *интенсивность* (плотность) источника поля $\boldsymbol{F}$ в точке $\boldsymbol{a}$. Для понимания дальнейшего полезно представлять себе $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ как вектор скорости установившегося течения какой-либо среды (жидкости или газа) в точке $\boldsymbol{r}$. По формуле Гаусса – Остроградского

$$\iiint\limits_{B_\varepsilon(\boldsymbol{a})} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\, dV = \iint\limits_{S_\varepsilon(\boldsymbol{a})} \langle \boldsymbol{F}\,, \boldsymbol{n}\rangle\, d\sigma, \tag{5}$$

где $B_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ — шар радиуса ε с центром в $\boldsymbol{a}$, $S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ — его поверхность, $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к ней, V — мера Лебега в $\mathbb{R}^3$(объём), σ — мера Лебега на поверхности сферы (площадь). Тогда поверхностный интеграл в правой части — это поток вектора $\boldsymbol{F}$ через сферу $S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ в направлении *наружу* (в гидродинамической интерпретации — количество жидкости, за единицу времени “вытекающей” из шара, а значит, “произведенной” в нем). Если поделить этот интеграл на объём шара, то мы получим среднюю производительность поля в точках шара. Устремляя ε к нулю, в пределе получаем плотность d источника поля в точке $\boldsymbol{a}$:

$$d = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\mathrm{V}(B_\varepsilon(\boldsymbol{a}))}\iint\limits_{S_\varepsilon(\boldsymbol{a})} \langle \boldsymbol{F}\,, \boldsymbol{n}\rangle\, d\sigma.$$

В силу (5),

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mathrm{V}(B_\varepsilon(\boldsymbol{a}))} \iiint\limits_{B_\varepsilon(\boldsymbol{a})} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$$

(мы воспользовались тем, что среднее значение непрерывной функции на шаре, стягивающемся в точку $\boldsymbol{a}$, равно значению этой функции в $\boldsymbol{a}$).

Если d отрицательно, то это означает, что поле не "создается", а "исчезает" внутри маленькой шаровой окрестности точки ("стекает" в неё), а $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ тогда трактуется как "плотность стока" поля в точке $\boldsymbol{a}$.

Вернемся теперь к примеру 2. Условие $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ в области G означает отсутствие в ней источников поля. Если, скажем, $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, то источник поля может находиться единственно лишь в точке ноль (в случае гравитационного поля $\boldsymbol{F}$ это *центральная точечная масса*, сосредоточенная в начале координат). Наше решение (4) на стр. 6 показывает, что такое поле направлено радиально, а его абсолютная величина убывает по закону обратных квадратов:

$$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})| = \frac{|C\boldsymbol{r}|}{\rho^3} = \frac{|C|}{\rho^2}.$$

Положим для красоты $C = -\gamma M m$ $(\gamma, M, m > 0), \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}/\rho$. Тогда

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \gamma \, \frac{Mm}{\rho^2}(-\boldsymbol{r}_0),$$

и мы можем торжественно объявить, что "на кончике пера", не совершая никаких экспериментов, вывели ньютоновский закон всемирного тяготения (γ, M, m интерпретируются как постоянная тяготения и массы взаимодействующих тел, $-\boldsymbol{r}_0$ — единичный вектор, указывающий направление силы).