Экстремальные задачи: ответы на экзаменационные вопросы

Алексей Богатов, 345 Юрий Литвинов, 345 Александр Дольник, 341
Константин Щербаков, 345 Антон Комиссаров, 341 Георгий Чернышев, 342
Юрий Плотников, 341 Артем Кашин, 342

11 января 2005 г.

Содержание

1 Линейные экстремальные задачи

1.1 Лемма об эквивалентных экстремальных задачах

Определение 1.1.1 *Две экстремальные задачи*

$$f(x) \to \inf_{x\in P}, \quad F(y) \to \inf_{y\in Q} \tag{1.1.1}$$

наз. эквивалентными, если
$\forall x \in P \quad \exists y \in Q \quad f(x) \geq F(y), \qquad \forall y \in Q \quad \exists x \in P \quad F(y) \geq f(x).$

Лемма 1.1.1 *Задачи* (1.1.1) *эквивалентны* $\Rightarrow$

$$\overbrace{\inf_{x\in P} f(x)}^{=\mu} = \overbrace{\inf_{y\in Q} F(y)}^{=\nu}; \tag{1.1.2}$$

при этом обе задачи одновременно имеют или не имеют решение.

Доказательство.

$$\forall x \in P \quad \exists y \in Q \quad f(x) \geq F(y) \geq \nu \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \nu$$

Аналогично $\nu \geq \mu$.
Пусть x^* – оптимальный план, т.е. $f(x^*) = \mu$.

$$\exists y^* \in Q \quad f(x^*) \geq F(y^*)$$

Но $F(y^*) \geq \nu = \mu \quad \Rightarrow \quad F(y^*) = \nu \quad \Rightarrow \quad y^*$ – оптимальный план.

Что и требовалось доказать.

1.2 Примеры эквивалентных экстремальных задач

Пример 1.2.1

$$\varphi(x) := \max_{i\in 1:n} f_i(x) \to \inf_{x\in P} \tag{1.2.1}$$

$$\psi(x,t) := t \to \inf, \tag{1.2.2}$$

$$f_i(x) \le t, \quad i \in 1:n, \quad x \in P$$

Доказательство эквивалентности (1.2.1) **и** (1.2.2).

$$x_0 \in P; \quad t_0 := \max_{i\in 1:n} f_i(x_0)$$

(x_0, t_0) – план (1.2.2)

$$\psi(x_0,t_0) = t_0 = \max f_i(x_0) = \varphi(x_0)$$

(x_0, t_0) – план (1.2.2) $\Rightarrow x_0 \in P$ – план (1.2.1)

$$\varphi(x_0) = \max_{i\in 1:n} f_i(x_0) \le t_0 = \psi(x_0,t_0)$$

(x_*, t_*) – оптимальный план (1.2.2) $\Rightarrow \quad t_* = \max_{i\in 1:n} f_i(x_*)$

Что и требовалось доказать.

Пример 1.2.2

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| \to \inf_{x\in P} \tag{1.2.3}$$

$$\psi(x,u,v) = \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) \to \inf_{x\in P}, \tag{1.2.4}$$

$$f_i(x) = u_i - v_i, \quad u_i \ge 0, \quad v_i \ge 0, \quad i \in 1:n$$

Доказательство эквивалентности (1.2.3) **и** (1.2.4).

$$a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists u, v \ge 0: \quad a = u - v, \quad |a| = u + v$$

$$u = \frac{|a| + a}{2} \ge 0, \quad v = \frac{|a| - a}{2} \ge 0$$

$x \in P$ – план (1.2.3)

$$a_i = f_i(x) = u_i - v_i, \quad |a_i| = u_i + v_i, \quad u_i, v_i \ge 0$$

(x, u, v) – план (1.2.4)

$$\psi(x,u,v) = \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| = \varphi(x)$$

(x, u, v) – план (1.2.4) $\quad \Rightarrow \quad x \in P$ – план (1.2.3)

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| = \sum_{i=1}^{m} |u_i - v_i| \le \sum_{i=1}^{m} (|u_i| + |v_i|) = \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) = \psi(x,u,v)$$

Что и требовалось доказать.

1.3 Постановка задачи линейного программирования. Сведение общей задачи линейного программирования к эквивалентной задаче линейного программирования в канонической форме

$$f(x) := c[N] \times x[N] \to \inf \tag{1.3.1}$$

$$A[M_1, N] \times x[N] \ge b[M_1]$$

$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$

$x[N_1] \ge \mathbb{O}[N_1]$ – знаковое ограничение.

$N_1 \subset N, \quad M_1 \cap M_2 = \varnothing, \quad N_2 = N \setminus N_1, \quad M = M_1 \cup M_2$
$A[M, N]$
Ω–множество планов.

$$\langle c, x\rangle \to \inf_{x\in\Omega}$$

$$f(x) := \sum_{j\in N} c[j] \times x[j]$$

$$\sum_{j\in N} A[i,j] \times x[j] \ge b[i], \quad i \in M_1$$

$$\sum_{j\in N} A[i,j] \times x[j] = b[i], \quad i \in M_2$$

$$x[j] \ge 0, \quad j \in N_1$$

Задача вида

$$f(x) = c[N] \times x[N] \to \inf \tag{1.3.2}$$

$$A[M, N] \times x[N] = b[M]$$

$$x[N] \ge \mathbb{O}[N]$$

называется *канонической задачей линейного программирования*

$$f(x) = \langle c, x\rangle \to \min$$

$$Ax = b$$

$$x \ge \mathbb{O}$$

Среди неотрицательных решений найти решение, минимизирующее целевую функцию. Всякая задача в общей форме выражается через задачу в канонической форме.

Ω – множество планов (1.3.1).

$$N_2 = N \setminus N_1$$

$$x_0[N_2] = \underbrace{y_0[N_2]}_{\ge 0} - \underbrace{z_0[N_2]}_{\ge 0}$$

$$w_0[M_1] = A[M_1, N] \times x_0[N] - b[M_1]$$

$$A[M_1,N_1] \times x_0[N_1] + A[M_1,N_2] \times y_0[N_2] - A[M_1,N_2] \times z_0[N_2] - w_0[M_1] = b[M_1]$$

$$A[M_2,N_1] \times x_0[N_1] + A[M_2,N_2] \times y_0[N_2] - A[M_2,N_2] \times z_0[N_2] = b[M_2]$$

$$v_0 = (x_0[N_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} A[M_1,N_1] & A[M_1,N_2] & -A[M_1,N_2] & -E[M_1,M_1] \\ A[M_2,N_1] & A[M_2,N_2] & -A[M_2,N_2] & \mathbb{O}[M_2,M_1] \end{pmatrix}$$

$$A_0 = (A[M,N_1], A[M,N_2], -A[M,N_2], -E[M,M_1])$$

$$\langle c, x_0\rangle = c[N_1] \times x_0[N_1] + c[N_2] \times y_0[N_2] - c[N_2] \times z_0[N_2]$$

$$c_0 = (c[N_1], c[N_2], -c[N_2], \mathbb{O}[M_1])$$

$$\langle c, x_0\rangle = \langle c_0, v_0\rangle$$

$$\langle c_0, v\rangle \to \inf \tag{1.3.3}$$

$$A_0 v = b, \quad v \ge \mathbb{O}$$

Теорема 1.3.1 *(1.3.1) и (1.3.3) эквивалентны.*

Доказательство.
$x_0 \in \Omega \Rightarrow$ строим v_0 — план (1.3.3).
$\langle c_0, v_0\rangle = \langle c, x_0\rangle$ — значения целевой функции равны.
$v_0 = (x_0[M_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$ — план (1.3.3).
$\Rightarrow x_0 = (x_0[M_1], y_0[N_2] - z_0[N_2])$
Очевидно, что $x_0 \in \Omega$ и $\langle c, x_0\rangle = \langle c_0, v_0\rangle$

Что и требовалось доказать.

1.4 Лемма о базисном плане

$$x \in \Omega : \quad N_+(x) = \{j \in N | x[j] > 0\}$$

Определение 1.4.1 *План $x \in \Omega$ называется* ***базисным,*** *если $A_j = A[M, j], j \in N_+(x)$, линейно независимы. (столбцы A, соответствующие носителю плана x, линейно независимы). Нулевой вектор, если он является планом, будет по определению базисным.*

x — базисный план. $x \neq \mathbb{O}$, $\quad N_+ = N_+(x)$

$$\sum_{j \in N_+} x[j] A_j = b \qquad (Ax = b)$$

$$x[j] > 0, j \in N_+, \qquad x[j] = 0, j \in N \setminus N_+$$

Система $\sum_{j \in N_+} z[j] A_j = \mathbb{O}$ имеет только нулевое решение.

$$A[M, N_+] \times z[N_+] = \mathbb{O}[M] \tag{1.4.1}$$

Лемма 1.4.1 *Пусть $\Omega \neq \varnothing$, $\inf_{x\in\Omega} f(x) > -\infty$ и $b \neq \mathbb{O}$. Тогда по любому плану $x_0 \in \Omega$ можно построить базисный план $y_0 : \langle c, x_0\rangle \geq \langle c, y_0\rangle$.*

Доказательство.
Возьмем $x_0 \in \Omega$. Поскольку $b \neq \mathbb{O}$, то $N_+ := N_+(x_0) \neq \varnothing$
Рассмотрим систему (1.4.1). Если она имеет только нулевое решение, то x_0 — базисный план. ($y_0 := x_0$)
Пусть (1.4.1) имеет ненулевое решение $z_0[N_+]$. Дополним $z_0[N \setminus N_+] = \mathbb{O}[N \setminus N_+]$

$$Az_0 = \mathbb{O}, \quad z_0 \neq \mathbb{O} \tag{1.4.2}$$

1. $\langle c, z_0\rangle = 0$. Можно считать, что у z_0 есть хотя бы одна положительная компонента (иначе z_0 заменить на $-z_0$)

$$x(t) := x_0 - tz_0, \quad t > 0$$

$$Ax(t) = b = \quad \forall t > 0$$

$$= Ax_0 - t\underbrace{Az_0}_{=\mathbb{O}}$$

$$x(t) \geq \mathbb{O} \quad ?$$

   (a)
$$j \in N \setminus N_+ : \quad x(t)[j] = 0 \ \ \forall t$$

   (b)
$$j \in N_+, \ z_0[j] \leq 0 : \quad x_0[j] - tz_0[j] > 0 \ \ \forall t > 0$$

   (c)
$$j \in N_+, \ z_0[j] > 0 : \quad x_0[j] - tz_0[j] \geq 0 \iff t \leq \frac{x_0[j]}{z_0[j]}$$

$$t_0 := \min\left\{ \frac{x_0[j]}{z_0[j]} \,\middle|\, j \in N_+, \ z_0[j] > 0 \right\} \tag{1.4.3}$$

j_0 – индекс, на котором достигается минимум

$$x_1 = x(t_0) = x_0 - t_0 z_0 \in \Omega,$$

$$N_+(x_1) \subsetneqq N_+(x_0) \text{ (выбит индекс } j_0\text{)}$$

$$\langle c, x_1\rangle = \langle c, x_0\rangle - t_0 \overbrace{\langle c, z_0\rangle}^{=0} = \langle c, x_0\rangle$$

2.

$$\langle c, z_0 \rangle \neq 0.$$

Можно считать, что $\langle c, z_0 \rangle > 0$, иначе вместо z_0 возьмем $-z_0$.
Докажем, что $\exists j \mid Z_0[j] > 0$.
От противного: пусть $z_0 \leq \mathbb{O}$.

$$x(t) := x - tz_0; \quad x(t) \in \Omega \ \ \forall t > 0 \quad (Ax(t) = b, \ x(t) \geq \mathbb{O} \ \forall t > 0)$$

$$\langle c, x(t) \rangle = \langle c, x_0 \rangle - t \overbrace{\langle c, z_0 \rangle}^{>0} \quad \xrightarrow[t \to +\infty]{} \quad -\infty$$

Противоречие условию $\inf f(x) > -\infty$.
t_0 – по формуле (1.4.3); $x_1 = x_0 - t_0 z_0 \in \Omega, \ \ N_+(x_1) \subsetneqq N_+(x_0)$.

$$\langle c, x_1 \rangle = \langle c, x_0 \rangle - \overbrace{t_0 \langle c, z_0 \rangle}^{>0} < \langle c, x_0 \rangle$$

Итак, если x_0 не является базисным планом, то $\exists x_1 \in \Omega$: $N_+(x_1) \subsetneqq N_+(x_0), \ \ \langle c, x_1 \rangle \leq \langle c, x_0 \rangle$.
x_1 – либо базисный план, либо нет; во втором случае $\exists z_1 : \ \ Az_1 = \mathbb{O}, \ z_1 \neq \mathbb{O}$.
Тогда перейдем от x_1 к x_2, как выше от x_0 к x_1:

$$N_+(x_2) \subsetneqq N_+(x_1), \quad \langle c, x_2 \rangle \leq \langle c, x_1 \rangle$$

За конечное число шагов дойдем до базисного плана y_0.

Что и требовалось доказать.

1.5 Теорема о существовании оптимального базисного плана у задачи линейного программирования в канонической форме

Теорема 1.5.1 (о существовании решения).
Если $\Omega \neq \varnothing$ и $\inf_{x \in \Omega} f(x) > -\infty$, то существует оптимальный базисный план.

Доказательство (теоремы о существовании решения).

1.

$$b = \mathbb{O} \ \Rightarrow \ \langle c, x \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in \Omega$$

$$(\ \text{пусть } \exists x_0 : \ \langle c, x \rangle < 0, \ \text{тогда}$$

$$x(t) = tx_0 \in \Omega \ \ \forall t > 0, \ \text{поскольку } Ax(t) = \mathbb{O}, \ x(t) \geq \mathbb{O};$$

$$\langle c, tx_0 \rangle = t \langle c, x_0 \rangle \quad \xrightarrow[t \to +\infty]{} \quad -\infty \ \ )$$

Итак, в этом случае $x_* = 0$ – оптимальный БП.

2.

$$b \neq \mathbb{O} :$$

Поскольку $\Omega \neq \varnothing$, существует БП y_0.
Покажем, что базисных планов конечное число.
Проверим, что разные БП имеют разные носители.
От противного. Пусть $y_0 \neq y_1$ – БП, $N_+(y_0) = N_+(y_1) =: N_+, \ \ y_0[N_+] \neq y_1[N_+]$.

$$\sum_{j \in N_+} y_0[j] A_j = b, \quad \sum_{j \in N_+} y_1[j] A_j = b \ \Rightarrow \ \sum_{j \in N_+} (y_0[j] - y_1[j]) A_j = \mathbb{O},$$

что противоречит базисности планов y_0 и y_1.
Итак, базисных планов конечное число. $y_1, \ldots, y_k$ – БП.
Выберем $x_* \in \{y_1, \ldots, y_k\} : \ \ \langle c, x_* \rangle = \min_{j \in 0:k} \langle c, y_j \rangle$.
Покажем, что x_* – оптимальный БП для исходной задачи.
$\forall x \in \Omega$ по лемме $\exists$ БП $y : \ \ \langle c, x \rangle \geq \langle c, y \rangle \geq \langle c, x_* \rangle$.

Что и требовалось доказать.

1.6 Формулировка теоремы Фаркаша. Ее интерпретация в двумерном случае

Определение 1.6.1 $K \subset \mathbb{R}^N$ — *конус (в начале координат).*
$x \in K \Longrightarrow tx \in K \quad \forall t > 0$
K^+ — *сопряженный конус.* $K^+ = \{u \in \mathbb{R}^N \mid \langle u, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in K\}$

Теорема 1.6.1 (теорема Фаркаша).

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle a_i, x\rangle \geq 0,\ i \in M\} \Longrightarrow K^+ = \operatorname{cone}(\{a_i\}_{i\in M}) = \{u = \sum_{i \in M} t_i a_i \mid t_i \geq 0, i \in M\}$$

Двумерный случай:

$$K : \begin{matrix} \langle a_1, x\rangle \geq 0 \\ \langle a_2, x\rangle \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow K^+ = \operatorname{cone}(a_1, a_2)$$

$$u \in K^+ : \quad u = t_1 a_1 + t_2 a_2,\ t_1, t_2 \geq 0$$

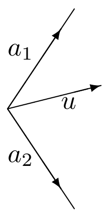

Рис. 1.6.1: Двумерный случай

1.7 Критерий существования неотрицательного решения у системы линейных уравнений

Лемма 1.7.1

$$A = A[M, N]$$

$$Ax = b,\ x \geq 0 \tag{1.7.1}$$

(1.7.1) *совместна* $\Longleftrightarrow$

$$\langle b, u\rangle \geq 0 \quad \forall u : \ uA \geq \mathbb{O} \ (\text{или } A^T u \geq \mathbb{O}). \tag{1.7.2}$$

Доказательство.
(1.7.1) совместна $\Longleftrightarrow$ $\sum_{j\in N} x[j]A_j = b,\ x[j] \geq 0,\ j \in N (A_j = A[M, j]) \Longleftrightarrow b \in \underbrace{\operatorname{cone}(\{A_j\}_{j\in M})}_{\Gamma}$
Введем конус $K = \{u \in \mathbb{R}^M \mid \langle b, u\rangle \geq 0\} = \{u \mid uA \geq \mathbb{O}\}$
$K^+ = \Gamma$ по теореме Фаркаша (теорема 1.6.1).
(1.7.1) совместна $\Longleftrightarrow b \in \Gamma \Longleftrightarrow b \in K^+ \Longleftrightarrow \langle b, u\rangle \geq 0 \ \forall u \in K$,
$K = \{u \mid uA \geq \mathbb{O}\}$.

Что и требовалось доказать.

Замечание 1.7.1 (1.7.2) $\Longleftrightarrow$

$$\langle b, u\rangle \leq 0 \ \forall u : uA \leq \mathbb{O}. \tag{1.7.3}$$

$\Big(\Longrightarrow: uA \leq \mathbb{O} \Longrightarrow (-u)A \geq \mathbb{O} \Longrightarrow \langle (-u), b\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle u, b\rangle \leq 0.$
$\Longleftarrow$: *столь же очевидно.* $\Big)$
(1.7.1) *совместна* $\Longrightarrow \langle b, u\rangle \leq 0 \ \forall u : uA \leq \mathbb{O}$.

1.8 Критерий совместности системы линейных уравнений и неравенств

Теорема 1.8.1 *Система*

$$\begin{array}{c} A[M_1,N]\times x[N]\geq b[M_1]\\ A[M_2,N]\times x[N]=b[M_2]\\ x[N_1]\geq \mathbb{O}[N_1]\end{array} \quad (1.8.1)$$

совместна $\iff$ $\langle b,u\rangle\leq 0\ \forall u\in\mathbb{R}^M$:

$$\begin{array}{c} u[M]\times A[M,N_1]\leq \mathbb{O}[N_1]\\ u[M]\times A[M,N_1]=\mathbb{O}[N_2]\\ u[M_1]\geq \mathbb{O}[M_1]\end{array} \quad (1.8.2)$$

Доказательство.
Совместность (1.8.1) эквивалентна совместности

$$A_0=b,\ v\geq 0, \quad (1.8.3)$$

где $A_0=(A[M,N_1],\ A[M,N_2],\ -A[M,N_2],\ -E[M,N_2])$.

По лемме (1.8.3) совместна $\iff$ $\langle b,u\rangle\leq 0\ \forall\ u:\ uA_0\leq\mathbb{O}\iff(1.8.2)$

$$u[M]\times A[M,N_1]\leq \mathbb{O}[N_1]$$

$$\left.\begin{array}{r} u[M]\times A[M,N_2]\leq \mathbb{O}[N_2]\\ -u[M]\times A[M,N_2]\leq \mathbb{O}[N_2]\end{array}\right\}\Longrightarrow U[M]\times A[M,N_2]=\mathbb{O}[N_2]$$

$$-u[M]\times E[M,M_1]\leq \mathbb{O}[M_1]\iff u[M_1]\geq \mathbb{O}[M_1].$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1.8.1 (1.8.1) *несовместна* $\iff$ $\exists u$, *удовлетворяющее* (1.8.2).

Следствие 1.8.1 (теорема Фань-Цзы).
$Ax\geq b$ *совместна* $\iff$ $\langle b,u\rangle\leq 0$
$\forall u:\ uA=\mathbb{O},\ u\geq\mathbb{O}\quad (A^Tu=\mathbb{O},\ u\geq\mathbb{O})$
Условия на множества: $M_2=\varnothing,\ M_1=M,\ N_1=\varnothing,\ N_2=N.$

1.9 Основная лемма линейного программирования

Лемма 1.9.1 (основная лемма ЛП)

$$\begin{cases}\langle c,x\rangle=\mu\\ Ax=b\\ x\geq\mathbb{O}\end{cases} \quad (1.9.1)$$

$$A=A[M,N]$$

Пусть система (1) *совместна, однако становится несовместной при замене* μ *на* $\mu-\lambda\ \forall\lambda>0$. *Тогда совместна система*

$$uA\leq c,\quad \langle b,u\rangle=\mu. \quad (1.9.2)$$

Доказательство.

$$\begin{cases}\langle c,x\rangle-t\mu=-1\\ Ax-tb=\mathbb{O}\\ x\geq\mathbb{O},\quad t>0\end{cases} \quad (1.9.3)$$

Докажем, что система (1.9.3) несовместна.
От противного: пусть (x_0,t_0) удовлетворяет (1.9.3).

1.
$$t_0=0.\qquad \langle c,x_0\rangle=-1,\ Ax_0=\mathbb{O},\ x_0\geq\mathbb{O}$$

Пусть y_0 удовлетворяет (1.9.1). Тогда $x_1:=y_0+x_0$.

$$\langle c,x_1\rangle=\langle c,y_0\rangle+\langle c,x_0\rangle=\mu-1;\quad Ax_1=b,\ x_1\geq\mathbb{O}$$

Противоречие условию.

2.
$$t_0>0.\qquad x_1:=\frac{x_0}{t_0}$$

Пусть y_0 удовлетворяет (1.9.1). Тогда $x_1:=y_0+x_0$.

$$\langle c,x_1\rangle=\mu-\frac{1}{t_0};\quad Ax_1=b,\ x_1\geq\mathbb{O}$$

Противоречие условию.

Итак, система (1.9.3) несовместна.

$$\begin{array}{c|}\gamma\\ u\end{array}\ \begin{pmatrix}-c & \mu\\ A & -b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix},\quad x\geq\mathbb{O},\ t\geq 0 \quad (3')$$

$$\begin{pmatrix}-c\\ A\end{pmatrix}\times x=\begin{pmatrix}-\mu\\ b\end{pmatrix},\quad x\geq\mathbb{O} \quad (1')$$

$(3')$ несовместна, $(1')$ совместна.
В силу несовместности $(3')$ (см. лемму 1.7.1):

$$\exists(\gamma_0,u_0):\ -\gamma_0c+u_0A\leq\mathbb{O},\ \gamma_0\mu-\langle b,u_0\rangle\leq 0,\ \gamma_0>0.$$

В силу совместности $(1')$ и условия $-\gamma_0c+u_0A\leq\mathbb{O}$:

$$-\gamma_0\mu+\langle b,u_0\rangle\leq 0.$$

Получили:
$$-\gamma_0\mu+\langle b,u_0\rangle=0;\quad -\gamma_0c+u_0A\leq\mathbb{O}$$

$$u_*:=\frac{u_0}{\gamma_0};\qquad u_*A\leq c,\ \langle b,u_*\rangle=\mu$$

Что и требовалось доказать.

1.10 Критерий оптимальности для общей задачи линейного программирования

$$f(x) := c[N] \times x[N] \to \inf \qquad (1.10.1)$$

$$\Omega : \begin{cases} A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1] \end{cases}$$

Теорема 1.10.1 (критерий оптимальности).
$x_* \in \Omega$ – *оптимальный план* (1.10.1) $\iff$ $\exists u_* = u_*[M]$:

$$\langle c, x_* \rangle = \langle b, u_* \rangle \qquad (1.10.2)$$

$$\begin{cases} u_*[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1] \\ u_*[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \\ u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1] \end{cases} \qquad (1.10.3)$$

Доказательство.
Необходимость. $x_* \in \Omega$ – оптимальный план (1.10.1).
Запишем эквивалентную задачу:

$$\begin{cases} \langle c_0, v \rangle \to \inf \\ A_0 v = b \\ v \geq \mathbb{O} \end{cases} \qquad (1.10.4)$$

По эквивалентности у (1.10.4) $\exists$ оптимальный план v_* и $\langle c, x_* \rangle = \langle c_0, v_* \rangle =: \mu$.

$$\begin{cases} \langle c_0, v \rangle = \mu \\ A_0 v = b \\ v \geq \mathbb{O} \end{cases} \quad -$$

эта система совместна (v_*), при уменьшении μ становится несовместной.

По лемме 1.9.1$\exists u_*$: $\underbrace{u_* A_0 \leq c_0}_{\iff (1.10.3)}$, $\underbrace{\langle b, u_* \rangle = \mu = \langle c, x_* \rangle}_{(1.10.2)}$

$A_0 = (A[M, N_1] \quad A[M, N_2] \quad -A[M, N_2] \quad -E[M, M_1])$
$c_0 = (c[N_1] \quad c[N_2] \quad -c[N_2] \quad \mathbb{O}[M_1])$
$u_* A_0 \leq c_0$:

$$u_*[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1]$$

$$\left.\begin{matrix} u_*[M] \times A[M, N_2] \leq c[N_2] \\ -u_*[M] \times A[M, N_2] \leq -c[N_2] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad u_*[M] \times A[M, N_2] = c[N_2]$$

$$-u_*[M] \times E[M, M_1] \leq \mathbb{O}[M_1] \quad \iff \quad u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$$

Достаточность. Выполнены (1.10.2), (1.10.3).

$$\forall x \in \Omega \quad \langle c, x \rangle = c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \times x[N_2] \overset{(1.10.3)}{\geq}$$

$$\geq u_*[M] \times A[M, N_1] \times x[N_1] + u_*[M] \times A[M, N_2] \times x[N_2] = u_*[M] \times (A[M, N] \times x[N]) =$$

$$= u_*[M_1] \times (A[M_1, N] \times x[N]) + u_*[M_2] \times (A[M_2, N] \times x[N]) \geq$$

$$\geq u_*[M_1] \times b[M_1] + u_*[M_2] \times b[M_2] = \langle b, u_* \rangle \overset{(1.10.2)}{=} \langle c, x_* \rangle$$

Итак, $\forall x \in \Omega \quad \langle c, x_* \rangle \leq \langle c, x \rangle$.

Что и требовалось доказать.

1.11 Первая теорема двойственности в линейном программировании

$$f(x) := \langle c, x \rangle \to \inf_{x \in \Omega} \qquad (1.11.1)$$

$$\Lambda, \quad g(u) = \langle b, u \rangle$$

Критерий оптимальности: $x_* \in \Omega$ оптимален $\iff$ $\exists u_* \in \Lambda$: $\langle c, x_* \rangle = \langle b, u_* \rangle$.
Известно, что $f(x) \geq g(u) \quad \forall x \in \Omega \, \forall u \in \Lambda$.
В частности, при $u \in \Lambda \quad g(u) \leq f(x_*) = g(u_*)$,
т.е. – решение задачи ЛП

$$g(u) := \langle b, u \rangle \to \sup_{u \in \Lambda} \qquad (1.11.2)$$

В силу критерия оптимальности (1.10.1) по решению x_* задачи (1.11.1) найдется u_* – решение задачи (1.11.2);
более того,

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \sup_{u \in \Lambda} g(u) \qquad (1.11.3)$$

Определение 1.11.1 (1.11.2) *называется задачей, двойственной к* (1.11.1).

Подробнее:

$$g(u) := b[M] \times u[M] \to \sup$$

$$\left.\begin{matrix} u[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1] \\ u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \\ u[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1] \end{matrix}\right\} \qquad (2')$$

(1.11.2) [(2′)] имеет решение u_*. Покажем, что (1.11.1) имеет решение и выполняется (1.11.3) – соотношение двойственности. u_* является решением следующей задачи:

$$-\langle b, u \rangle \to \inf$$

$$-A^T[N_1, M] \times u[M] \geq -c[N_1]$$

$$-A^T[N_2, M] \times u[M] = -c[N_2]$$

$$u[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$$

По критерию оптимальности 1.10.1 $\exists x_* = x_*[N]$:

$$-\langle b, u_* \rangle = -\langle c, x_* \rangle$$

$$-x_*[N] \times A^T[N, M_1] \leq -b[M_1]$$

$$-x_*[N] \times A^T[N, M_2] = -b[M_2]$$

$$x_*[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1]$$

$$\Downarrow$$

$$\langle b, u_* \rangle = \langle c, x_* \rangle$$

$$A[M_1, N] \times x_*[N] \geq b[M_1]$$

$$A[M_2, N] \times x_*[N] = b[M_2]$$

$$x_*[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1]$$

$$x_* \in \Omega, \quad u_* \in \Lambda, \quad \langle c, x_* \rangle = \langle b, u_* \rangle$$

По критерию оптимальности 1.10.1 для (1.11.1) x – оптимальный план и выполняется (1.11.3).

Таким образом, нами доказана

Теорема 1.11.1 (I теорема двойственности).
Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая имеет решение; при этом выполняется (1.11.3).

1.12 Критерий совместной разрешимости пары двойственных задач линейного программирования

$$f(x) := \langle c, x\rangle \to \inf_{x \in \Omega} \qquad (1.12.1)$$

$$g(u) := \langle b, u\rangle \to \sup_{u \in \Lambda} \qquad (1.12.2)$$

Теорема 1.12.1 *Обе двойственные задачи (1.12.1) и (1.12.2) одновременно имеют решение* $\iff$ $\Omega \neq \varnothing$ *и* $\Lambda \neq \varnothing$.

Доказательство достаточности.
$\Omega \neq \varnothing$ по условию
$\Lambda \neq \varnothing$ $\exists$ план u_0 задачи (1.11.2).

$$f(x) \geq g(u_0) \quad \forall x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \inf_{x \in \Omega} f(x) > -\infty.$$

По теореме существования 1.5.1 $\exists$ оптимальный план задачи (1.11.1).
По первой теореме двойственности 1.11.1 (1.11.2) тоже имеет решение.

Что и требовалось доказать.

1.13 Вторая теорема двойственности в линейном программировании

$$f(x) := \langle c, x\rangle \to \inf_{x \in \Omega} \qquad (1.13.1)$$

$$g(u) := \langle b, u\rangle \to \sup_{u \in \Lambda} \qquad (1.13.2)$$

Теорема 1.13.1 (II теорема двойственности).
$x_0,\ u_0$ *– планы двойственных задач.*
$x_0,\ u_0$ *оптимальны* $\iff$ *выполняются условия дополнительности:*

$$\langle u_0, Ax_0 - b\rangle = 0 \qquad (1.13.3)$$

$$\langle c - u_0 A, x_0\rangle = 0 \qquad (1.13.4)$$

Доказательство.
Необходимость.

$$\langle c, x_0\rangle \overset{N=N_1\cup N_2}{\geq} \langle u_0 A, x_0\rangle = \langle u_0, Ax_0\rangle \overset{M=M_1\cup M_2}{\geq} \langle u_0, b\rangle$$

$x_0,\ u_0$ оптимальны $\Rightarrow$ $\langle c, x_0\rangle = \langle b, u_0\rangle$
Достаточность.
Следует из критерия оптимальности 1.10.1 для (1.13.1) и первой теоремы двойственности 1.11.1.

Что и требовалось доказать.

(1.13.3), (1.13.4) эквивалентны соответственно

$$u_0[i] \times (A[i,N] \times x_0[N] - b[i]) = 0, \quad i \in M_1 \qquad (4')$$

$$(c[j] - u_0[M] \times A[M,j]) \times x_0[j] = 0, \quad j \in N_1, \qquad (5')$$

так как

(1.13.3) $\iff \sum_{i \in M_1} u_0[i] \times (A[i,N] \times x_0[N] - b[i]) = 0 \Rightarrow$ все слагаемые равны.

$(4'),\ (5')$ $\iff$

$$\iff \quad u_0[M] \times A[M,j] = c[j], \quad \text{если } x_0[j] > 0\ (j \in N_1)$$

$$u_0[i] = 0, \quad \text{если } A[i,N] \times x_0[N] > b[i]\ (i \in M_1)$$

С другой стороны, $(4'),\ (5')$ $\iff$

$$\iff \quad A[i,N] \times x_0[N] = b[i], \quad \text{если } u_0[j] > 0\ (i \in M_1)$$

$$x_0[j] = 0, \quad \text{если } u_0[M] \times A[M,j] < c[j]\ (j \in N_1)$$

1.14 Постановка задачи о матричных играх. Лемма об очистке

$A = A[M, N]$ – матрица платежей
Стратегия I игрока: $p = p[M]: \quad \sum_{i \in M} p[i] = 1, \ p[i] \geq 0, \ i \in M$
P – множество стратегий I игрока
Стратегия II игрока: $q = q[N]: \quad \sum_{j \in N} q[j] = 1, \ q[j] \geq 0, \ j \in N$
Q – множество стратегий II игрока
Определим $a(p, q)$ – среднюю величину платежа в каждой партии.
В случае $p = e_i, \quad q = e_j \quad a(e_i, e_j) = A[i, j]$

$$a(e_i, q) = \sum_{j \in N} A[i, j] \times q[j]$$

$$a(p, e_j) = \sum_{i \in M} p[i] \times A[i, j]$$

$$a(p, q) = \sum_{j \in N} (p[M] \times A[M, j]) \times q[j] = p[M] \times A[M, N] \times q[N]$$

Фиксируем p. $\quad \varphi(p) = \min_{q \in Q} a(p, q)$ – гарантированный выигрыш.

I игрок выбирает $p_* \in P$:

$$\varphi(p_*) = \max_{p \in P} \varphi(p) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} a(p, q) \tag{1.14.1}$$

Фиксируем q. $\quad \psi(q) = \max_{p \in P} a(p, q)$.

II игрок выбирает $q_* \in Q$:

$$\psi(q_*) = \min_{q \in Q} \psi(q) = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} a(p, q) \tag{1.14.2}$$

Лемма 1.14.1 (лемма об очистке). *Справедливы равенства*

$$\varphi(p) = \min_{j \in N} p[M] \times A[M, j] \ \ \forall p \in P \tag{1.14.3}$$

$$\psi(q) = \max_{i \in M} A[i, N] \times q[N] \ \ \forall q \in Q \tag{1.14.4}$$

Доказательство.

$$\varphi(p) \qquad a(p, q) \to \inf_{q \in Q}$$

p фиксировали

$$(p[M] \times A[M, N]) \times q[N] \to \inf$$

$$\sum_{j \in N} q[j] = 1$$

$$q[N] \geq \mathbb{O}[N]$$

Решение существует в силу ограниченности множества планов.
По теореме о существовании решения найдется оптимальный **базисный** план.
Все множество базисных планов: $\{e_j\}, \quad j \in N$.

$$\varphi(p) = \min_{j \in N} a(p, e_j) = \min_{j \in N} p[M] \times A[M, j].$$

Что и требовалось доказать.

1.15 Теорема о существовании ситуации равновесия в матричных играх

$A = A[M, N]$ – матрица платежей
Стратегия I игрока: $p = p[M]: \quad \sum_{i \in M} p[i] = 1, \ p[i] \geq 0, \ i \in M$
P – множество стратегий I игрока
Стратегия II игрока: $q = q[N]: \quad \sum_{j \in N} q[j] = 1, \ q[j] \geq 0, \ j \in N$
Q – множество стратегий II игрока
Определим $a(p, q)$ – среднюю величину платежа в каждой партии.

$$a(p, q) = \sum_{j \in N} (p[M] \times A[M, j]) \times q[j] = p[M] \times A[M, N] \times q[N]$$

Фиксируем p. $\quad \varphi(p) = \min_{q \in Q} a(p, q)$ – гарантированный выигрыш.

I игрок выбирает $p_* \in P$:

$$\varphi(p_*) = \max_{p \in P} \varphi(p) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} a(p, q) \tag{1.15.1}$$

Фиксируем q. $\quad \psi(q) = \max_{p \in P} a(p, q)$.

II игрок выбирает $q_* \in Q$:

$$\psi(q_*) = \min_{q \in Q} \psi(q) = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} a(p, q) \tag{1.15.2}$$

Теорема 1.15.1 (о существовании ситуации равновесия).
Стратегии p_*, q_* существуют.
При этом пара $\{p_*, q_*\}$ образует ситуацию равновесия:

$$a(p, q_*) \leq a(p_*, q_*) \leq a(p_*, q) \qquad \forall p \in P \ \ \forall q \in Q \tag{1.15.3}$$

Задача для I игрока:

$$\varphi(p) = \min_{j \in N} \underbrace{p[M] \times A[M, j]}_{t} \to \sup_{p \in P} \tag{1.15.4}$$

$$\psi(q) = \max_{i \in M} \underbrace{A[i, N] \times q[N]}_{s} \to \inf_{q \in Q} \tag{1.15.5}$$

(1.15.4) эквивалентна

$$t \to \sup \tag{1.15.6}$$

$$-p[M] \times A[M, j] + t \leq 0, \quad j \in N$$

$$\sum_{i \in M} p[i] = 1$$

$$p[M] \geq \mathbb{O}[M]$$

(p, t)

(1.15.5) эквивалентна

$$s \to \inf \tag{1.15.7}$$

$$-A[i, N] \times q[N] + s \geq 0, \quad i \in M$$

$$\sum_{j \in N} q[j] = 1$$

$$q[N] \geq \mathbb{O}[N]$$

(q, s)

(1.15.6) и (1.15.7) – двойственные задачи:
(1.15.7):

	0	. . .	0	1	
				1	0
$p[M]$		$-A[M, N]$		$\vdots$	$\vdots$
				1	0
t	1	. . .	1	0	1

$$q[N] \geq \mathbb{O}[N]$$

Множества планов у (1.15.6) и (1.15.7) непусты (из-за произвольности t и s)
$\exists\,(p^*, t^*)$, (q^*, s^*) – оптимальные; $t^* = s^*$ по первой теореме двойственности
В силу эквивалентности

$$\begin{matrix} t^* = \varphi(p^*) \\ s^* = \psi(q^*) \end{matrix} \Rightarrow \varphi(p^*) = \psi(q^*) \tag{1.15.8}$$

(1.15.8) $\Longleftrightarrow$

$$\min_{q \in Q} a(p^*, q) = \max_{p \in P} a(p, q*) \tag{1.15.9}$$

$$a(p^*, q^*) \le \max_{p \in P} a(p, q*) \overset{(1.15.9)}{=} \min_{q \in Q} a(p^*, q) \le a(p^*, q^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \max_{p \in P} a(p, q*) = a(p^*, q^*) = \min_{q \in Q} a(p^*, q) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a(p, q*) \le a(p^*, q^*) \le a(p^*, q)$$

Этим мы доказали теорему о существовании равновесия.

1.16 Анализ двойственной задачи к линейной дискретной задаче оптимального управления

$$\sum_{k=1}^{s} \langle c_k, x_k \rangle + \sum_{k=1}^{s} \langle b_k, u_k \rangle \to \sup \tag{1.16.1}$$

$$p_k \;\; | \quad x_k = A_{k-1} x_{k-1} + B_k u_k, \quad k \in 1:s \tag{1.16.2}$$

$$q_k \;\; | \quad D_k u_k \le d_k, \quad k \in 1:s \tag{1.16.3}$$

$$x_0 = \hat{x} \tag{1.16.4}$$

$$A_k = A_k[N,N], \quad B_k = B_k[N,M], \quad D_k = D_k[T,M]$$

	u_1	x_1	u_2	x_2	u_3	x_3	...	x_{s-1}	u_s	x_s	
	b_1	c_1	b_2	c_2	b_3	c_3	...	c_{s-1}	b_s	c_s	
p_1	$-B_1$	E	0	0	0	0	...	0	0	0	$A_0\hat{x}$
q_1	D_1	0	0	0	0	0	...	0	0	0	$\le d_1$
p_2	0	$-A_1$	$-B_2$	E	0	0	...	0	0	0	$= 0$
q_2	0	0	D_2	0	0	0	...	0	0	0	$\le d_2$
p_3	0	0	0	$-A_2$	$-B_3$	E	...	0	0	0	$= 0$
.	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	...
p_s	0	0	0	0	0	0	...	$-A_{s-1}$	$-B_s$	E	$= 0$
q_s	0	0	0	0	0	0	...	0	D_s	0	$\le d_s$

$$\langle A_0\hat{x}, p_1 \rangle + \sum_{k=1}^{s} \langle d_k, q_k \rangle \to \inf \tag{1.16.5}$$

$$-p_k B_k + q_k D_k = b_k, \quad k \in 1:s$$

$$p_k - p_{k+1} A_k = c_k, \quad k \in 1:s-1$$

$$p_s = c_s$$

$$q_k \ge \mathbb{0}, \quad k \in 1:s$$

$$\left.\begin{array}{c} p_k = p_{k+1} A_k + c_k, \quad k = s-1, \ldots, 1 \\ p_s = c_s \end{array}\right\} \tag{1.16.6}$$

(1.16.6): по предыдущим координатам однозначно определяется p_k

$$(1.16.5) \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{s} \langle d_k, q_k \rangle \to \inf$$

$$D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k, \quad k \in 1:s$$

$$q_k \ge \mathbb{0}, \quad k \in 1:s$$

(1.16.5) распадается на s независимых задач ЛП:

$$\langle d_k, q_k \rangle \to \inf \tag{1.16.7}$$

$$u_k \;\; | \quad D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k$$

$$q_k \ge \mathbb{0}$$

Двойственная задача:

$$H_k(u_k) = \langle B_k^T p_k + b_k, u_k \rangle \to \sup \tag{1.16.8}$$

$$U_k: \quad D_k u_k \le d_k$$

(U_k – множество планов (1.16.8))
$H_k(u_k) = \langle b_k, u_k \rangle + \langle p_k, B_k u_k \rangle$ – функция Гамильтона

1.17 Принцип максимума для линейных дискретных систем

$$\sum_{k=1}^{s} \langle c_k, x_k \rangle + \sum_{k=1}^{s} \langle b_k, u_k \rangle \to \sup \tag{1.17.1}$$

$$p_k \quad \Big| \quad x_k = A_{k-1} x_{k-1} + B_k u_k, \quad k \in 1:s \tag{1.17.2}$$

$$q_k \quad \Big| \quad D_k u_k \le d_k, \quad k \in 1:s \tag{1.17.3}$$

$$x_0 = \hat{x} \tag{1.17.4}$$

$$A_k = A_k[N, N], \quad B_k = B_k[N, M], \quad D_k = D_k[T, M]$$

$$\langle A_0 \hat{x}, p_1 \rangle + \sum_{k=1}^{s} \langle d_k, q_k \rangle \to \inf \tag{1.17.5}$$

(1.17.5) распадается на s независимых задач ЛП:

$$\langle d_k, q_k \rangle \to \inf \tag{1.17.6}$$

$$u_k \quad \Big| \quad D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k$$
$$q_k \ge \mathbb{O}$$

Двойственная задача:

$$H_k(u_k) = \langle B_k^T p_k + b_k, u_k \rangle \to \sup \tag{1.17.7}$$
$$U_k : \quad D_k u_k \le d_k$$

(U_k – множество планов (1.17.7))
$H_k(u_k) = \langle b_k, u_k \rangle + \langle p_k, B_k u_k \rangle$ – функция Гамильтона

Теорема 1.17.1 (принцип максимума)
$\{u_k^*\}_{k=1}^s$ – *система допустимых управлений для* (1.17.1).
$\{u_k^*\}_{k=1}^s$ *оптимальна* $\iff$ $H_k(u_k^*) = \max_{u_k \in U_k} H_k(u_k)$ *при* $k \in 1:s$.
Переформулировка: u_k^* *– решение* (1.17.7).

[

$$x_k = A_{k-1} x_{k-1} + B_k u_k \tag{1.17.8}$$
$$D_k u_k \le d_k, \quad k \in 1:s$$

Ограничения двойственной задачи:

$$D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k, \quad q_k \ge \mathbb{O}, \quad k \in 1:s \tag{1.17.9}$$
$$p_k = p_{k+1} A_k + c_k, \quad k \in 1:s-1$$
$$p_s = c_s$$

Серия задач при каждом $k \in 1:s$

$$\langle d_k, q_k \rangle \to \inf \tag{1.17.10}$$
$$D_k^T q_k = B_k^T p_k + b_k$$
$$q_k \ge \mathbb{O}$$

$$\left\langle B_k^T p_k + b_k, u_k \right\rangle \to \sup \tag{1.17.11}$$
$$D_k u_k \le d_k$$

]

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (теоремы о принципе максимума)
$\Rightarrow$: $\{x_k^*, u_k^*\}_{k=1}^s$ — оптимальный план задачи (1.17.8). По I теореме двойственности $\exists$ решение $\{p_k, q_k^*\}$ задачи (1.17.9), по II теореме двойственности выполняется условие дополнительности.

$$\left\langle d_k - D_k u_k^*, q_k^* \right\rangle = 0 \quad \forall k \in 1:s$$

Фиксируем $k \in 1:s \Rightarrow q_k^*$ — план (1.17.10), u_k^* — план (1.17.11) и для них выполняется условие дополнительности:

$$\left\langle d_k - D_k u_k^*, q_k^* \right\rangle = 0$$

сл., по II теореме двойственности u_k^* — решение задачи (1.17.11).
$\Leftarrow$: Фиксируем $\forall k$. $\exists u_k^*$ — решение (1.17.11). Покажем, что система $\{u_k^*\}$ — оптимальное управление (1.17.8).
u_k^* по I теореме двойственности $\exists q_k^*$ — решение (1.17.10), $\{p_k, q_k^*\}$ — план двойственной задачи (1.17.9), $\{x_k^*, u_k^*\}_{k=1}^s$ — план (1.17.8). Поскольку $\forall k$ выполняется условие дополнительности для задачи (1.17.9), указанный план является оптимальным, т.е. $\{u_k^*\}$ оптимальна

Что и требовалось доказать.

1.18 Симплекс-метод

$$f(x) := c[N] \times x[N] \to \inf \tag{1.18.1}$$
$$A[M, N] \times x[N] = b[M]$$
$$x[N] \ge \mathbb{O}[N]$$

Двойственная задача:

$$b[M] \times u[M] \to \sup \tag{1.18.2}$$
$$u[M] \times A[M, N] \le c[N]$$

x — базисный план: $N_+ = N_+(x)$ — носитель,
$A[M, j], \quad j \in N_+(x)$ — линейно независимы. Условие невырожденности: для всех базисных планов x

$$|N_+(x)| = |M| \text{ — все базисные планы невырожденны.}$$

$A[M, N_+]$ — невырожденная матрица, называется базисной матрицей, соответствующей базисному плану x.
$B[N_+, M] = (A[M, N_+])^{-1}$ — обратная базисная матрица.

$$B[N_+, M] \times A[M, N_+] = E[N_+, N_+]$$

x_0 — начальный базисный план с носителем $N_+^{(0)} = N_+(x_0)$
$x_0 \to$ БП $\quad x_1 : \langle c, x_1 \rangle < \langle c, x_0 \rangle$
Предварительно проверим x_0 на оптимальность. Условие оптимальности:

$$u[M] \times A[M, N_+^{(0)}] = c[N_+^{(0)}] \qquad \text{(т. к. компоненты } x \text{ положительны на носителе)}$$

В силу невырожденности:

$$u_0[M] = c[N_+^{(0)}] \times B[N_+^{(0)}, M] \tag{1.18.3}$$

Проверим, что u_0 — план двойственной задачи.

$$\underbrace{\Delta_0[j]}_{\text{оценки}} = u_0[M] \times A[M, j] - c[j], \quad j \in N \setminus N_+^{(0)}$$

Если $\Delta_0[j] \le 0 \quad \forall j \in N \setminus N_+^{(0)}$, то x_0, u_0 — оптимальные планы.
Пусть $\exists j_0 \in N \setminus N_+^{(0)} : \Delta_0[j_0] > 0$

$$\Delta_0[j_0] \overset{(1.18.3)}{=} c[N_+^{(0)}] \times \underbrace{B[N_+^{(0)}, M] \times A[M, j_0]}_{z_0[N_+^{(0)}]} - c[j_0]$$

$$z_0[N_+^{(0)}] = B[N_+^{(0)}, M] \times A[M, j_0]$$

Иначе говоря,

$$A[M, N_+^{(0)}] \times z_0[N_+^{(0)}] = A[M, j_0] \tag{1.18.4}$$

$$z_0[j] = \begin{cases} -1 & j = j_0 \\ 0 & j \ne j_0, \quad j \in N \setminus N_+^{(0)} \end{cases}$$

(4) $\Rightarrow Az_0 = \mathbb{O}$

$$\Delta_0[j_0] = \langle c, z_0 \rangle > 0 \quad \text{(по усл.)}$$
$$x_0(t) = x_0 - tz_0, \quad t > 0$$
$$Ax_0(t) = b \quad \forall t$$

Если $z_0[N_+^{(0)}] \le \mathbb{O}[N_+^{(0)}]$, то $z_0 \le \mathbb{O}$ и $x_0(t) \ge 0 \quad \forall t > 0$

$$f(x_0(t)) = f(x_0) - t \langle c, z_0 \rangle = f(x_0) - t \underbrace{\Delta_0[j_0]}_{>0} \to -\infty \quad (l \to +\infty)$$

В этом случае задача не имеет решения.

$$\exists s \in N_+^{(0)} : z_0[s] > 0$$

$$x_0 - tz_0 \geq 0 \Rightarrow$$

$$t_0 = \min\left\{ \frac{x_0[s]}{z_0[s]} : s \in N_+^{(0)}, z_0[s] > 0 \right\} > 0 \qquad (1.18.5)$$

$x_1 = x_0 - t_0 z_0$ — план (1.18.1). s_0 — индекс, на котором достигается минимум в (1.18.5).
Имеем:

$$x_1[s] = x_0[s] - t_0 z_0[s], \quad s \in N_+^{(0)} \setminus \{s_0\}$$

$$x_1[j_0] = t_0 > 0 \quad \text{— носитель поменялся.}$$

$$x_1[j] = 0 \quad \text{при остальных } j \in N, \text{ в частности, } x_1[s_0] = 0 \qquad (1.18.6)$$

x_1 — план задачи (1.18.1)

$$f(x_1) = f(x_0) - t_0 \Delta_0[j_0] < f(x_0)$$

Покажем, что x_1 - базисный план.

$$N_+^{(1)} = N_+^{(0)} \setminus \{s_0\} \cup \{j_0\}, \quad |N_+^{(1)}| = |M|$$

Покажем, что $A[M, N_+^{(1)}]$ — невырожденная.
— Шерман-Моррисон...
Можно проще:
$A[M, N_+^{(1)}]$ получается из $A[M, N_+^{(0)}]$ заменой s_0 - столбца на j_0 - столбец.

$$A[M, j_0] = \sum_{s \in N_+^{(0)}} z_0[s] A[M, s] \qquad \Leftrightarrow (1.18.4)$$

при этом $z_0[s_0] > 0$
$C = C[1:m, 1:m]$ – обратимая
C_j – j-й столбец; $P = \sum_{s=1}^m z_s C_s$, $z_j \neq 0$; заменили, D – полученная матрица

Лемма 1.18.1 $\exists D^{-1}$, $D^{-1} = VC^{-1}$, *V – матрица, отличающаяся от E_m только j-м столбцом*

$$V_j = (-\frac{z_1}{z_j}, \ldots, -\frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{1}{z_j}, -\frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, -\frac{z_m}{z_j})^T$$

(Матрица V наз. мультипликатором.)

Доказательство.

$$D = C \begin{pmatrix} 1 & & z_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & z_j & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & z_m & & 1 \end{pmatrix} = CU$$

$$D^{-1} = U^{-1} C^{-1}$$

$U^{-1} = V$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & z_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & z_j & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & z_m & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & -z_1/z_j & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1/z_j & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -z_m/z_j & & 1 \end{pmatrix}$$

j-й столбец UV: $\quad (UV)_j = \frac{1}{z_j} \sum_{s \neq j} (-z_s e_s) + \frac{1}{z_j} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{z_j} \sum_{s \neq j} z_s e_s + \frac{1}{z_j} \sum_{s=1}^m z_s e_s = \frac{1}{z_j} z_j e_j = e_j$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -z_1/z_j & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1/z_j & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -z_m/z_j & & 1 \end{pmatrix} C^{-1}$$

$$D^{-1}[j, \cdot] = C^{-1}[j, \cdot]/z_j \quad \text{(рабочая строка)}$$

$$D^{-1}[s, \cdot] = C^{-1}[s, \cdot] - (\frac{z_s}{z_j}) C^{-1}[j, \cdot] = C^{-1}[s, \cdot] - z_s D^{-1}[j, \cdot], \quad s \neq j$$

Что и требовалось доказать.

1.19 Пересчет обратной базисной матрицы и двойственного вектора

$$A[M, N_+^{(0)}]; \quad B_0[N_+^{(0)}, M] = (A[M, N_+^{(0)}])^{-1}$$

$$N_+^{(1)} = N_+^{(0)} \setminus \{s_0\} \cup \{j_0\}$$

$$A[M, N_+^{(1)}]: \quad \text{на место } A_{s_0} \text{ ставится } A_{j_0}$$

$$B_1[N_+^{(1)}, M] = (A[M, N_+^{(1)}])^{-1}$$

$$A[M, j_0] = \sum_{s \in N_+^{(0)}} z_0[s] A[M, s], \quad z_0[s_0] > 0$$

$$B_1[N_+^{(1)}, M] \text{ сущ. и } B_1[j_0, M] = B_0[s_0, M]/z_0[s_0]$$

$$B_1[s, M] = B_0[s, M] - z_0[s] b_1[j_0, M], \quad s \in N_+^{(0)} \setminus \{s_0\}$$

$$u_1[M] = c[N_+^{(1)}] \times B_1[N_+^{(1)}, M]$$

$$u_0[M] = c[N_+^{(0)}] \times B_0[N_+^{(0)}, M]$$

Лемма 1.19.1

$$u_1[M] = u_0[M] - \Delta_0[j_0] B_1[j_0, M]$$

Доказательство.

$$u_1[M] = \sum_{s \in N_+^{(0)} \setminus \{s_0\}} c[s] B_1[s, M] + c[j_0] B_1[j_0, M] =$$

$$= \sum_{s \in N_+^{(0)} \setminus \{s_0\}} c[s](B_0[s, M] - z_0[s] b_1[j_0, M]) + c[j_0] B_1[j_0, M] =$$

$$= \underbrace{\sum_{s \in N_+^{(0)}} c[s] B_0[s, M] - c[s_0]}_{u_0[M]} \underbrace{B_0[s_0, M]}_{z_0[s] B_1[j_0, M]} - \Big(\sum_{s \in N_+^{(0)} \setminus \{s_0\}} c[s] z_0[s] - c[j_0]\Big) B_1[j_0, M] =$$

$$= u_0[M] - \Big(\sum_{s \in N_+^{(0)}} c[s] z_0[s] - c[j_0]\Big) B_1[j_0, M] =$$

$$= u_0[M] - \Delta_0[j_0] B_1[j_0, M]$$

Что и требовалось доказать.

БП $x_k \to$ БП x_{k+1}

Известно: $x_k, \; N_+^{(k)}, \; B_k[N_+^{(k)}, M], \; f(x_k) = \langle c, x_k \rangle, \; u_k[M]$

При $k = 0$: $\quad f(x_0) = c[N_+^{(0)}] \times x_0[N_+^{(0)}], \quad u_0[M] = c[N_+^{(0)}] \times B_0[N_+^{(0)}, M]$

1.
$$\Delta_k[j] = u_k[M] \times A[M, j] - c[j], \quad j \in N \setminus N_+^{(k)}$$

Если $\Delta_k[j] \le 0, \quad j \in N \setminus N_+^{(k)}$, то x_k – оптимальный план.

2.
$$\exists j_k \in N \setminus N_+^{(k)}: \quad \Delta_k[j_k] > 0 \;\Rightarrow\; z_k[N_+^{(k)}] = B_k[N_+^{(k)}, M] \times A[M, j_k]$$

Если $z_k[N_+^{(k)}] \le \mathbb{0}[N_+^{(k)}]$, то задача не имеет решения ($\inf = -\infty$).
Иначе

3.
$$t_k = \min\left\{ \frac{x_k[s]}{z_k[s]} \;\Big|\; s \in N_+^{(k)}, \; z_k[s] > 0 \right\}$$

s_k – индекс, на котором достигается минимум

4.
$$x_{k+1}[s] = x_k[s] - t_k z_k[s], \quad s \in N_+^{(k)} \setminus \{s_k\}$$

$$x_{k+1}[j_k] = t_k$$

$$N_+^{(k+1)} = N_+^{(k)} \setminus \{s_k\} \cup \{j_k\}$$

5.
$$B_{k+1}[j_k, M] = B_k[s_k, M]/z_k[j_k]$$

$$B_{k+1}[s, M] = B_k[s, M] - z_k[s] B_{k+1}[j_k, M], \quad s \in N_+^{(k)} \setminus \{s_k\}$$

6.
$$f(x_{k+1}) = f(x_k) - t_k \Delta_k[j_k]$$

$$u_{k+1}[M] = u_k[M] - \Delta_k[j_k] B_k[j_k, M]$$

$$x_{k+1}, \; N_+^{(k+1)}, \; B_{k+1}[N_+^{(k+1)}, M], \; f(x_{k+1}), \; u_{k+1}[M]; \quad f(x_{k+1}) < f(x_k)$$

Базисных планов конечное число.
В среднем шагов столько, сколько ограничений.

1.20 Вычислительная схема симплекс-метода

БП $x_k \to$ БП x_{k+1}

Известно: $x_k,\ N_+^{(k)},\ B_k[N_+^{(k)}, M],\ f(x_k) = \langle c, x_k\rangle,\ u_k[M]$

При $k = 0$: $\quad f(x_0) = c[N_+^{(0)}] \times x_0[N_+^{(0)}], \quad u_0[M] = c[N_+^{(0)}] \times B_0[N_+^{(0)}, M]$

1.
$$\Delta_k[j] = u_k[M] \times A[M, j] - c[j], \quad j \in N \setminus N_+^{(k)}$$

Если $\Delta_k[j] \le 0, \quad j \in N \setminus N_+^{(k)}$, то x_k – оптимальный план.

2.
$$\exists j_k \in N \setminus N_+^{(k)} : \quad \Delta_k[j_k] > 0 \ \Rightarrow \ z_k[N_+^{(k)}] = B_k[N_+^{(k)}, M] \times A[M, j_k]$$

Если $z_k[N_+^{(k)}] \le \mathbb{O}[N_+^{(k)}]$, то задача не имеет решения ($\inf = -\infty$).
Иначе

3.
$$t_k = \min\left\{ \frac{x_k[s]}{z_k[s]} \ \mid \ s \in N_+^{(k)}, \ \ z_k[s] > 0 \right\}$$

s_k – индекс, на котором достигается минимум

4.
$$x_{k+1}[s] = x_k[s] - t_k z_k[s], \quad s \in N_+^{(k)} \setminus \{s_k\}$$
$$x_{k+1}[j_k] = t_k$$
$$N_+^{(k+1)} = N_+^{(k)} \setminus \{s_k\} \cup \{j_k\}$$

5.
$$B_{k+1}[j_k, M] = B_k[s_k, M]/z_k[j_k]$$
$$B_{k+1}[s, M] = B_k[s, M] - z_k[s] B_{k+1}[j_k, M], \quad s \in N_+^{(k)} \setminus \{s_k\}$$

6.
$$f(x_{k+1}) = f(x_k) - t_k \Delta_k[j_k]$$
$$u_{k+1}[M] = u_k[M] - \Delta_k[j_k] B_k[j_k, M]$$

$x_{k+1},\ N_+^{(k+1)},\ B_{k+1}[N_+^{(k+1)}, M],\ f(x_{k+1}),\ u_{k+1}[M]; \quad f(x_{k+1}) < f(x_k)$

Базисных планов конечное число.
В среднем шагов столько, сколько ограничений.

it $= k$	$f(x_k)$	$u_k[M]$	$\Delta j_k = \Delta_k[j_k]$
$N_+^{(k)}$	$x_k[N_+^{(k)}]$	$B_k[N_+^{(k)}, M]$	$z_k[N_+^{(k)}]$

Пример 1.20.1
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \to \inf$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in 1:4$$

$x_0 = (1, 1, 0, 0)$ – начальный БП
Базисная матрица: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c	it $= 0$	2	1/3	4/3	$\Delta_4 = 4/3, \ \ \Delta_3 = -1 < 0$	A_4
3	**1**	1	1/3	1/3	1/3	−1
−1	2	1	2/3	−1/3	−4/3	2

it $= 1$	−2	−1	0	$\Delta_1 = -4 < 0, \ \ \Delta_3 = -1 < 0$
4	*3*	*1*	*1*	
2	5	2	1	

Курсивом выделена рабочая строка.

$$x_1[4] = t_0 = 3 = \frac{x_0[1]}{z_0[1]}$$
$$x_1[2] = x_0[2] - t_0 z_0[2]$$
$$f_1 = f_0 - t_0 \Delta_4$$
$$B_1[4, M] = B_0[4, M]/z_0[1]$$
$$B_1[s, M] = B_0[s, M] - z_0[s] \times B_1[4, M]$$
$$u_1[M] = u_0[M] - \Delta_4 \times B_1[4, M]$$
$$f_* = -2$$

Ответ: $x_* = (0, 5, 0, 3)$.

Пример 1.20.2
$$-3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \inf$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in 1:4$$

Метод искусственного базиса: переходим к вспомогательной задаче

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 9$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_7 = 6$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in 1:7$$
$$x_5 + x_6 + x_7 \to \inf$$

Задача гарантированно имеет решение.
$\inf = 0$ – получили решение; $\inf > 0$ – множество планов исходной задачи пусто.

it $= 0$	15	1	1	1	$\Delta_3 = 4$	A_3
5	0	1	0	0	−1	−1
6	9	0	1	0	3	3
7	6	0	0	1	2	2

0 во втором столбце говорит о вырожденности базисного плана
$9/3 = 6/2 = 3$ – признак вырожденности БП

it $= 1$	3	1	−1/3	1	$\Delta_2 = 5/3$	A_2
5	3	1	1/3	0	4/3	2
3	*3*	*0*	*1/3*	*0*	−2/3	−2
7	0	0	−2/3	1	1/3	−1

it $= 2$	3	1	3	−4	$\Delta_1 = 3$	A_1
5	3	1	3	−4	3	1
3	3	0	−1	2	0	2
2	*0*	*0*	*−2*	*3*	−1	1

Опасность зацикливания (значение целевой функции не изменилось)

(*) it $= 3$	7	2/3	−7	35/3	$\Delta_4 = -37/3 - 21 + 1 < 0$	A_4
1	*1*	*1/3*	*1*	*−4/3*		1
3	3	0	−1	2		3
2	1	1/3	−1	5/3		−1

(*) означает, что мы перешли к исходной задаче:
во вспомогательной задаче целевая функция стала бы нулем, мы же считаем верхнюю строку так, как это делается на нулевой итерации для исходной задачи.
$$f = \langle c, x\rangle, \quad u = c \times B$$
$$c[N_+] = (-3, 3, 1)$$

Ответ: $x_* = (1, 1, 3, 0), \quad f_* = 7$.

2 Нелинейные экстремальные задачи

2.1 Необходимые условия оптимальности для задачи нелинейного программирования с линейными ограничениями

$$f(x) \to \inf \qquad (2.1.1)$$
$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$
$$x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1]$$

Ω – замкнутое выпуклое, $\Omega^0 \subset \Omega$ – открытое выпуклое
f дифференцируема на Ω

Определение 2.1.1 *f дифференцируема в точке x, если $\exists a \in \mathbb{R}^N$:*

$$f(x+h) = f(x) + \langle a, h\rangle + o(\|h\|), \quad \text{где } \frac{o(\|h\|)}{h} \xrightarrow[h \to \mathbb{O}]{} 0.$$

Если a существует, то он единственный и $a = \left\{\frac{\partial f}{\partial x[i]}(x)\right\}_{i \in N}$ – градиент
f дифференцируема на Ω^0, если f дифференцируема $\forall x \in \Omega^0$

Лемма 2.1.1 *Если x_* – решение (2.1.1), то $\forall x \in \Omega$ справедливо неравенство*

$$\langle f'(x_*), x - x_*\rangle \geq 0 \qquad (2.1.2)$$

Доказательство.
При $x = x_*$ все очевидно.
Пусть $x \neq x_*$.
Ω выпукло $\Rightarrow$ $[x_*, x] \subset \Omega$, т.е. $x_* + t(x - x_*) \in \Omega \ \forall t \in [0, 1]$.
x_* – точка минимума $\Rightarrow$ $\forall t \in (0, 1)$ $\quad 0 \leq f(x_* + t(x - x_*)) - f(x_*) =$

$$= t\langle f'(x_*), x - x_*\rangle + o(t\|x - x_*\|)$$

$$t > 0: \quad \langle f'(x_*), x - x_*\rangle + \frac{o(t\|x - x_*\|)}{t\|x - x_*\|} \geq 0$$

$$t \to +0 \Rightarrow (2.1.2)$$

Что и требовалось доказать.

2.2 Теорема Лагранжа и теорема Куна–Таккера для экстремальных задач с линейными ограничениями

$$f(x) \to \inf \qquad (2.2.1)$$
$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$
$$x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1]$$

Ω – замкнутое выпуклое, $\Omega^0 \subset \Omega$ – открытое выпуклое
f дифференцируема на Ω

Теорема 2.2.1 *$x_* \in \Omega$ — оптимальный план* (2.2.1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists u_* = u_*[M]:$$

$$\left\langle f'(x_*), x_*\right\rangle = \langle b, u_*\rangle$$
$$u_*[M] \times A[M, N_1] \leq f'(x_*)[N_1] \qquad (2.2.2)$$
$$u_*[M] \times A[M, N_2] = f'(x_*)[N_2]$$
$$u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$$

Частные случаи:
I. $M_1 = \varnothing$, $M_2 = M$, $N_1 = \varnothing$, $N_2 = N$

$$f(x) \to \inf \qquad (2.2.3)$$
$$A[M, N] \times x[N] = b[M]$$

Теорема 2.2.2 [Лагранжа]
x_* — оптимальный план (2.2.3) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists u_*: f'(x_*) = u_* A.$$

Доказательство.
По общей теореме 2.2.1 $\exists u_*$:

$$\left\langle f'(x_*), x_*\right\rangle = \langle b, u_*\rangle, \ u_* A = f'(x_*).$$

$$[\left\langle f'(x_*), x_*\right\rangle = \langle u_* A, x_*\rangle = \langle u_*, Ax_*\rangle =$$
$$= \langle u_*, b\rangle \text{ — первое условие избыточно.]}$$

Что и требовалось доказать.

II. $N_1 = \varnothing$, $N_2 = N$.

$$f(x) \to \inf \qquad (2.2.4)$$
$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$

Теорема 2.2.3 *[Куна-Таккера] x_* — оптимальный план* (2.2.4) $\Rightarrow$
$\exists u_*: f'(x_*) = u_* A$

$$(A[i, N] \times x_*[N] - b[i]) \times u_*[i] = 0, \quad i \in M_1, \qquad (2.2.5)$$
$$u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$$

[(2.2.5) — условие дополнительности.]
Доказательство.
По общей теореме

$$u_* A = f'(x_*), \quad \left\langle f'(x_*), x_*\right\rangle = \langle b, u_*\rangle$$
$$u[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$$

$$\text{Рассмотрим } 0 = \left\langle f'(x_*), x_*\right\rangle - \langle b, u_*\rangle =$$
$$= \langle u_* A, x_*\rangle - \langle u_*, b\rangle = \langle u_*, Ax_* - b\rangle$$
$$\sum_{i \in M_1} \underbrace{(A[i, N] \times x_*[N] - b[i])}_{\geq 0} \times \underbrace{u_*[i]}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow (2.2.5)$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 2.2.1 *В формулировке теоремы 2.2.3 условие* (2.2.5) *можно заменить равносильным* $\langle Ax_* - b, u_*\rangle = 0$

2.3 Критерий выпуклости для дифференцируемых функций

f выпукла на Ω^0, если $\forall x_0, x_1 \in \Omega^0 \quad \forall t \in [0,1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_0) \qquad (2.3.1)$$

Лемма 2.3.1 (Критерий выпуклости дифференцируемой функции) *Пусть f дифференцируема на Ω^0. f выпукла на $\Omega^0 \Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in \Omega^0$:*

$$f(x_1) - f(x_0) \ge \left\langle f'(x_0), x_1 - x_0 \right\rangle \qquad (2.3.2)$$

Доказательство.

$\Rightarrow$:

$$(1') \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_0) \ge \frac{1}{t}[f(x_0 + t(x_1 - x_0)) - f(x_0)] =$$

$$= \left\langle f'(x_0), x_1 - x_0 \right\rangle + \frac{o(\|t(x_1 - x_0)\|)}{t\|x_1 - x_0|} \|x_1 - x_0\|$$

$t > 0$, переходим к пределу $\lim\limits_{t \to +0} \to (2.3.2)$.
Мы доказали (2.3.2) при $x_1 \ne x_0$. При $x_1 = x_0$ (2.3.2) тривиально.

$\Leftarrow$: Фиксируем разные x_0, x_1 из Ω^0, фиксируем $t \in [0,1]$.

$$x(t) := tx_1 + (1-t)x_0 \in \Omega^0$$

$$(2.3.2) : f(x_1) - f(x(t)) \ge \left\langle f'(x(t)), x_1 - x(t) \right\rangle \qquad | \times t$$

$$+ \quad f(x_0) - f(x(t)) \ge \left\langle f'(x(t)), x_0 - x(t) \right\rangle \qquad | \times (1-t)$$

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_0) - f(x(t)) \ge \langle f'(x(t)), \underbrace{tx_1 + (1-t)x_0 - x(t)}_{=0} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2.3.1)$$

Что и требовалось доказать.

2.4 Критерий выпуклости для квадратичной функции

$$Q(x+h) = \frac{1}{2}\langle D(x+h), x+h\rangle + \langle c, x+h\rangle + \alpha = Q(x) + \langle Dx + c, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Dh, h\rangle \qquad (2.4.1)$$

f выпукла на Ω^0, если $\forall x_0, x_1 \in \Omega^0 \quad \forall t \in [0,1]$

Лемма 2.4.1 *Квадратичная функция $Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle + \alpha$, $D^T = D$, является выпуклой на $\mathbb{R}^N \Leftrightarrow D$ неотрицательно определена, т. е. $\langle Dh, h\rangle \ge 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^N$.*

Доказательство.

$$\forall x_1, x_0 \in \mathbb{R}^N \quad Q(x_1) - Q(x_0) - \left\langle Q'(x_0), x_1 - x_0 \right\rangle = \frac{1}{2}\langle D(x_1 - x_0), x_1 - x_0\rangle$$

(по (2.4.1) из §1).
Если Q выпукла, то $\langle D(x_1 - x_0), x_1 - x_0\rangle \ge 0$,
Если D неотрицательно определена, то $\langle D(x_1 - x_0), x_1 - x_0\rangle \ge 0 \Rightarrow Q$ выпукла по критерию.

Что и требовалось доказать.

2.5 Критерий оптимальности для задачи нелинейного программирования с выпуклой дифференцируемой целевой функцией и линейными ограничениями. Частные случаи

$$\begin{gathered} f(x) \to \inf \qquad (2.5.1) \\ A[M_1, N \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N \times x[N] \geq b[M_2] \\ x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1] \end{gathered}$$

Предположим, что f выпукла и дифференцируема.

Теорема 2.5.1 *x_* — оптимальный план задачи (2.5.1) $\Leftrightarrow$*

$$\Leftrightarrow \exists u_* = u_*[M] : \left\langle f'(x_*), x_* \right\rangle = \langle b, u_* \rangle, u_*[M] \times A[M, N_1] \leq f'(x_*)[N_1]$$
$$u_*[M] \times A[M, N_2] = f'(x_*)[N_2]$$
$$u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Доказано в §1.

$\Leftarrow$:

$$(!) \quad f(x) - f(x_*) \geq 0$$

$$f(x) - f(x_*) \overset{(2.3.2)}{\geq} \left\langle f'(x_*), (x - x_*) \right\rangle = \left\langle f'(x_*), x \right\rangle -$$
$$- \left\langle f'(x_*), x_* \right\rangle \overset{N=N_1 \cup N_2}{\geq} \langle u_* A, x \rangle - \langle b, u_* \rangle =$$
$$= \langle u_*, Ax - b \rangle \overset{M=M_1 \cup M_2}{\geq} 0$$

Что и требовалось доказать.

Частные случаи: **I.**

$$\begin{gathered} f(x) \to \inf \qquad (2.5.2) \\ A[M, N] \times x[N] = b[M] \end{gathered}$$

Теорема 2.5.2 *x_* — оптимальный план (2.5.2) с выпуклой дифференцируемой $f \Leftrightarrow \exists u_* : f'(x_*) = u_* A$.*

Доказательство.

$\Rightarrow$: Доказано в §1.

$\Leftarrow$:

$$f(x) - f(x_*) \overset{(2.3.2)}{\geq} \left\langle f'(x_*), x - x_* \right\rangle =$$
$$\langle u_* A, x - x_* \rangle = \langle u_*, \underbrace{(Ax - b)}_{=0} + \underbrace{(b - Ax_*)}_{=0} \rangle = 0$$

Что и требовалось доказать.

II.

$$\begin{gathered} f(x) \to \inf \qquad (2.5.3) \\ A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] \geq b[M_2] \end{gathered}$$

Теорема 2.5.3 *x_* — оптимальный план (2.5.3) с выпуклой дифференцируемой функцией $f \Leftrightarrow$*

$$\begin{gathered} \Leftrightarrow \exists u_* = u_*[M] : f'(x_*) = u_* A, \\ (A[i, M] \times x_*[N] - b[i])\, u_*[i] = 0, \quad i \in M_1, \\ u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]. \end{gathered}$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Доказано в §1.

$\Leftarrow$:

$$f(x) - f(x_*) \geq \left\langle f'(x_*), x - x_* \right\rangle =$$
$$= \langle u_*, (Ax - b) + \underbrace{(b - Ax_*)}_{=0 \text{ из усл. доп-сти.}} \rangle = \langle u_*, Ax - b \rangle \overset{M=M_1 \cup M_2}{\geq} 0$$

Что и требовалось доказать.

2.6 Проектирование точки на подпространство

Пример 2.6.1 (Проектирование точки на подпространство)
Пусть $A = A[M,N]$ — матрица с ЛНЗ строками, $c \in \mathbb{R}^N$ — фиксирована.

$$\|x - c\| \to \inf$$
$$A[M,N] \times x[N] = \mathbb{O}[M]$$

[Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма.]

<-!-РИСУНОК-!->

Эквивалентная задача: [не в смысле определения 1.1.1, а из-за равенства точки минимума.]

$$Q(x) = \frac{1}{2}\|x - c\|^2 \to \inf$$
$$Ax = \mathbb{O}$$

$$\frac{1}{2}\|x - c\|^2 = \frac{1}{2}\langle x - c, x - c\rangle = \frac{1}{2}\langle Ex, x\rangle - \langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\|c\|^2$$

$Q(x)$ — квадр. функция с неотрицательно определенной матрицей $E \Rightarrow Q$ выпукла на $\mathbb{R}^N$, $Q'(x) = x - c$
Критерий оптимальности:

$$\begin{cases} x - c = & uA \\ Ax = & \mathbb{O} \end{cases}$$

$$uA = A^T u; \qquad | \times A \text{ слева}$$

$$\underbrace{Ax}_{=\mathbb{O}} - Ac = AA^T u \Rightarrow (AA^T)u = -Ac$$

Обратима ли AA^T?
Рассмотрим ОСЛУ $(AA^T)v = 0$. Пусть v_0 — решение $\Rightarrow$

$$0 = \left\langle AA^T v_0, v_0\right\rangle = \left\langle A^T v_0, A^T v_0\right\rangle = \left\|A^T v_0\right\|^2 \Rightarrow A^T v_0 = \mathbb{O}$$

Линейная комбинация столбцов A^T (строк A) дает $\mathbb{O}$. Значит, $v_0 = \mathbb{O}$; AA^T — невырожденная матрица.

2.7 Свойства матрицы ортогонального проектирования

$P = E - A^T(AA^T)^{-1}A$ – матрица ортогонального проектирования

Лемма 2.7.1 (свойства матрицы P).

1. $PA^T = \mathbb{O}$, $\quad PP = P$.

2. P симметрична, неотрицательно определена.

3. $rank\, P = |N| - |M|$.

Доказательство.

1.
$$PA^T = EA^T - A^T(AA^T)^{-1}AA^T = \mathbb{O}$$
$$PP = PE - PA^T(AA^T)^{-1}A = PE - \mathbb{O}(\underbrace{AA^T}_{\text{симм.}})^{-1}A = P$$

2.
$$P^T = (E - A^T(AA^T)^{-1}A)^T = E^T - A^T[(AA^T)^{-1}](A^T)^T = P$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \langle Px, x\rangle = \langle PPx, x\rangle = \langle Px, Px\rangle \geq 0$$

3. Рассмотрим однородную систему уравнений

$$Px = \mathbb{O} \tag{2.7.1}$$

$PA^T = \mathbb{O} \Rightarrow \exists$ как минимум $|M|$ лин. независимых решений (2.7.1) (строки матрицы A)
Пусть x_0 – другое решение (2.7.1).

$$\mathbb{O} = Px_0 = x_0 - A^T(AA^T)^{-1}Ax_0 = x_0 - A^T v \;\Rightarrow\; x_0 = A^T v \text{ – линейная комбинация}$$

$$\dim\{x \mid Px = \mathbb{O}\} = |M|$$

По теореме из алгебры $\dim\{x \mid Px = \mathbb{O}\} = |N| - rank\, P$.

Что и требовалось доказать.

2.8 Проектирование точки на стандартный симплекс

Пример 2.8.1 *Проектирование точки на стандартный симплекс*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{1}{2}\|x - c\|^2 \to \inf$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \lambda \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \quad (n+1) \text{ строка, } n \text{ столбцов}$$

Критерий оптимальности:

$$x_j - c_j = \lambda + u_j, \quad j \in 1:n$$

$$x_j u_j = 0, \quad j \in 1:n$$

$$u_j \geq 0, \quad j \in 1:n$$

$$\lambda + c_j = x_j - u_j$$

$$|\lambda + c_j| = |x_j - u_j| = x_j + u_j,$$

так как либо $x_j = 0,\ u_j \geq 0$, либо $x_j \geq 0,\ u_j = 0$

$$x_j = \frac{\lambda + c_j + |\lambda + c_j|}{2}$$

Обозначим $t_+ = \frac{t+|t|}{2}$; $\quad x_j = (\lambda + c_j)_+,\ j \in 1:n$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda + c_j)_+ = 1$$

Переупорядочим последовательность $\left\{-c_j\right\}$ по неубыванию;
получим последовательность $\left\{a_j\right\}:\ a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda - a_j)_+$$

$\varphi(\lambda)$ – непрерывная выпуклая ломаная, монотонно возрастает при $\lambda \geq a_1$ от 0 до $+\infty \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ \varphi(\lambda) = 1$ имеет единственное решение λ_*

$$\lambda \leq a_1: \quad \varphi(\lambda) = 0$$

$$\lambda \in [a_k, a_{k+1}]: \quad \varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} (\lambda - a_j) = k\lambda - s_k, \quad s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$$

$$\lambda \geq a_n: \quad \varphi(\lambda) = n\lambda - s_n$$

$$\varphi_k := \varphi(a_k),\ k \in 1:n; \quad \varphi_k = ka_k - s_k$$

$$\lambda \in [a_k, a_{k+1}]: \quad \varphi(\lambda) = \varphi_k + k(\lambda - a_k)$$

$$\lambda \geq a_n: \quad \varphi(\lambda) = \varphi_n + n(\lambda - a_n)$$

$$\varphi_1 = 0; \qquad \varphi_{k+1} = \varphi_k + k(a_{k+1} - a_k),\ k \in 1:n-1 \tag{2.8.1}$$

Как искать λ_*? Если $\varphi_k < 1 \leq \varphi_{k+1}$ при некотором k, то

$$\lambda_* = a_k + \frac{1 - \varphi_k}{k} \tag{2.8.2}$$

Если $\varphi_n < 1$, то

$$\lambda_* = a_n + \frac{1 - \varphi_n}{n} \tag{2.8.3}$$

Окончательно:

$$x_j^* = (\lambda_* + c_j)_+ \tag{2.8.4}$$

Алгоритм:

1. Переупорядочиваем $\left\{-c_j\right\} \longrightarrow \left\{a_j\right\}:\ a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.
2. Последовательно вычисляем $\varphi_2, \varphi_3, \dots$ по (2.8.1) до тех пор, пока не $\varphi_k < 1 \leq \varphi_{k+1}$, и вычисляем λ_* по формуле (2.8.2).
3. Если $\varphi_n < 1$, то вычисляем λ_* по формуле (2.8.3).
4. Вычисляем x_j^* по формуле (2.8.4).

2.9 Квадратичное программирование

$$Q(x) := \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \inf \tag{2.9.1}$$

$$\Omega \begin{cases} A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1] \end{cases}$$

D симметрична, неотрицательно определена ($\Rightarrow Q$ выпукла)

Теорема 2.9.1 (теорема существования).
Задача (2.9.1) имеет решение $\iff$ $\Omega \neq \varnothing$ *и* $\inf_{x\in\Omega} Q(x) > -\infty$.

Лемма 2.9.1 *Линейная система $Ax = b$ совместна* $\iff$ *любое решение v однородной системы $vA = \mathbb{O}$ ортогонально b, т.е. $\langle b, v\rangle = 0$.*

Без доказательства (факт из алгебры).

$$Q(x) := \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \inf \tag{2.9.2}$$

$$\omega: \quad A[M, N] \times x[N] = b[M]$$

По теореме Лагранжа 2.2.2

$$x_* \text{ – оптимальный план} \iff \exists u_* \quad Dx_* + c = A^T u_*$$

Лемма 2.9.2 *Задача (2.9.2) имеет решение, если $\omega \neq \varnothing$ и $\inf_{x\in\omega} Q(x) > -\infty$.*

Доказательство.
От противного. Пусть решения нет.
Тогда несовместна система $\begin{cases} Dx - A^T u = -c \\ -Ax = -b \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists v = v[N] \text{ и } \lambda = \lambda[M]:$$

$$\begin{gathered} vD - \lambda A = \mathbb{O}, \quad Av = \mathbb{O} \\ \langle c, v\rangle + \langle b, \lambda\rangle \neq 0 \end{gathered} \tag{2.9.3}$$

Зафиксируем $x_0 \in \omega$.
Рассмотрим $x_t = x_0 + tv$. $\quad x_t \in \omega \ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$$Q(x_t) - Q(x_0) = t\langle Dx_0 + c, v\rangle + \frac{1}{2}t^2\langle Dv, v\rangle = t\langle Dx_0, v\rangle + t\langle c, v\rangle + \frac{1}{2}t^2\langle \lambda A, v\rangle =$$

$$= t\langle c, v\rangle + t\langle x_0, Dv\rangle + \frac{1}{2}t^2\langle \lambda, Av\rangle = t\langle c, v\rangle + t\langle x_0, \lambda A\rangle =$$

$$= t(\langle c, v\rangle + \langle Ax_0, \lambda\rangle) = t(\langle c, v\rangle + \langle b, \lambda\rangle)$$

Значит, Q не ограничена снизу на ω. Противоречие. (2.9.2) имеет решение.

Что и требовалось доказать.

Теорема 2.9.2 *(критерий оптимальности)*
$x_* \in \Omega$ *— оптимальный план (2.10.1)* $\Leftrightarrow$ $\exists u_* = u_*[M]$

$$\begin{gathered} \langle b, u_*\rangle = \langle Dx_* + c, x_*\rangle \\ -x_*[N] \times D[N, N_1] + u_*[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1] \\ -x_*[N] \times D[N, N_2] + u_*[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \\ u_*[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1] \end{gathered} \tag{2.9.4}$$

Доказательство.
Переформулировка общей теоремы 2.2.1.

$$Q'(x_*) = Dx_* + c, \quad D = D^T$$

Что и требовалось доказать.

Перепишем (2.9.4):

$$\underbrace{\frac{1}{2}\langle Dx_*, x_*\rangle + \langle c, x_*\rangle}_{Q(x_*)} = \underbrace{-\frac{1}{2}\langle Dx_*, x_*\rangle + \langle b, u_*\rangle}_{q(x_*, u_*)}$$

Введем G — множество пар $z = \{v, u\}$:

$$\begin{gathered} -v[N] \times D[N, N_1] + u[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1] \\ -v[N] \times D[N, N_2] + u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \\ u[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1] \end{gathered}$$

Критерий оптимальности:
$x_* \in \Omega$ — оптимален $\Leftrightarrow$ $\exists u_* : z_* := \{x_*, u_*\} \in G$ и $Q(x_*) = q(z_*)$.

Лемма 2.9.3

$$\forall x \in \Omega, \forall z \in G$$

$$Q(x) \geq q(z)$$

$$q(z) = -\frac{1}{2}\langle Dv, v\rangle + \langle b, u\rangle$$

Доказательство.

$$\langle b, u\rangle \overset{\mathrm{M}=\mathrm{M}_1\cup\mathrm{M}_2}{\leq} \langle Ax, u\rangle = \langle uA, x\rangle \overset{\mathrm{N}=\mathrm{N}_1\cup\mathrm{N}_2}{\leq} \langle Dv + c, x\rangle = \langle c, x\rangle + \langle Dv, x\rangle \tag{2.9.5}$$

D — неотрицательно определена $\Rightarrow$

$$0 \leq \frac{1}{2}\langle D(v - x), v - x\rangle = \frac{1}{2}\langle Dv, v\rangle + \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle - \langle Dv, x\rangle$$

Подставим в (2.9.5) — получаем требуемое.

Что и требовалось доказать.

x_* — оптимальный план $\Rightarrow$ $\exists u_* : z_* = \{x_*, u_*\} \in G$ и $Q(x_*) = q(z_*)$
По лемме 2.9.3 $\forall z \in G \quad q(z) \leq Q(x_*) = q(z_*)$ — значит, что z_* — решение экстремальной задачи.

$$q(z) \to \sup_{z\in G} \tag{2.9.6}$$

(2.9.6) наз. *двойственной* к (2.10.1)

$$\min_{x\in\Omega} Q(x) = \max_{z\in G} q(z) \tag{2.9.7}$$

Можно показать, что (2.9.6) $\Rightarrow$ (2.10.1).

Теорема 2.9.3 *(1-я теорема двойственности)*
Если одна из пары двойственных задач (2.10.1), (2.9.6) имеет решение, то имеет решение и вторая, при этом выполнено (2.9.7). Как и в линейном случае, можно доказать критерий совместной разрешимости и вторую теорему двойственности.

2.10 Теорема существования для задачи квадратичного программирования

$$Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \inf \qquad (2.10.1)$$

$$\Omega \begin{cases} A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ x[N_1] \geq \mathbb{O}[N] \end{cases}$$

Здесь $D = D^T$, неотрицательно определена.

Теорема 2.10.1 *Задача* (2.10.1) *имеет решение* $\Leftrightarrow$ $\Omega \neq \varnothing$ *и* $Q(x)$ *ограничена снизу на* Ω.

Доказательство.

$$\hat{A}[T, N] \times x[N] \geq \hat{b}[T], \text{ где}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A[M_1, N] \\ A[M_2, N] \\ -A[M_2, N] \\ E[N_1, N] \end{pmatrix} \qquad \hat{b} = \begin{pmatrix} b[M_1] \\ b[M_2] \\ -b[M_2] \\ \mathbb{O}[N_1] \end{pmatrix}$$

$$\Delta(x)[T] = \hat{A}[T, N] \times x[N] - \hat{b}[T]$$

Для $\gamma \subset T$:

$$\Omega(\gamma) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \begin{array}{r} \Delta(x)[\gamma] = \mathbb{O}[\gamma] \\ \Delta(x)[T \setminus \gamma] > \mathbb{O}[T \setminus \gamma] \end{array} \right\}$$

— грань (случай $\gamma = \varnothing$ не исключается).

$$\Gamma = \{\gamma \subset T : \Omega(\gamma) \neq \varnothing\}$$

$$\Omega(\gamma) \subset \Omega \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

$$\Omega(\gamma) \cap \Omega(\gamma') = \varnothing \quad \text{при} \quad \gamma \neq \gamma'$$

$$\Omega = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Omega(\gamma) \Rightarrow$$

$$\alpha := \inf_{x \in \Omega} Q(x) = \min_{\gamma \in \Gamma} \inf_{x \in \Omega}(\gamma) Q(x) \qquad (2.10.2)$$

γ_* — множество, на котором достигается min в (2.10.2) с наибольшим количеством элементов.

$$\inf_{x \in \Omega(\gamma_*)} Q(x) = \alpha \qquad (2.10.3)$$

Обозначим $\partial\Omega(\gamma_*) = \bigcup\limits_{\substack{\gamma \supset \gamma_* \\ \gamma \neq \gamma_*}} \Omega(\gamma)$ — относительная граница грани.

I. Пусть $\partial\Omega(\gamma_*) \neq \varnothing$

$$\alpha := \inf_{x \in \partial\Omega(\gamma_*)} Q(x) > \alpha \qquad (2.10.4)$$

В частности,

$$\exists x_0 \in \Omega(\gamma_*) : \quad Q(x_0) < \alpha' \qquad (2.10.5)$$

Введем множество $\omega_* = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \Delta(x)[\gamma_*] = \mathbb{O} \right\}$ ω_* — аффинная оболочка грани $\Omega(\omega_*)$

Покажем, что

$$Q(x) > \alpha' \quad \forall x \in \omega_* \setminus \Omega \qquad (2.10.6)$$

Фиксируем $x_1 \in \omega_* \setminus \Omega \quad \Rightarrow \quad \Delta(x)[i] < 0$ при некоторых $i \in T$

$$x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$$

$$\exists t : x_t \in \partial\Omega(\gamma_*) \qquad ?$$

$$\Delta(x_t) = \Delta(x_0) + t(\Delta(x_1) - \Delta(x_0))$$

Положим

$$t = \min_{\{i \in T \setminus \gamma_* : \Delta(x_1)[i] < 0\}} \frac{\Delta(x_0)[i]}{\Delta(x_0)[i] - \Delta(x_1)[i]} \qquad (2.10.7)$$

$$t \in (0; 1), \quad \Delta(x_t)[i_0] = 0,$$

где i_0 — индекс, на котором достигается минимум в (2.10.7)

В целом: $\Delta(x_0) \geq \mathbb{O}$

$$x_t \in \omega_* \quad \Rightarrow \quad x_t \in \partial\Omega(\gamma_*)$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{определение } \alpha' \\ \text{выпуклость } Q \\ \text{неравенство (2.10.5)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha' \leq Q(x_t) \leq tQ(x_1) + (1-t)Q(x_0) < tQ(x_1) + (1-t)\alpha'$$

$$\Rightarrow Q(x_1) > \alpha' \Rightarrow (2.10.6)$$

$$\omega_* = (\omega_* \setminus \Omega) \cup (\omega_* \cap \Omega) = (\omega_* \setminus \Omega) \cup \Omega(\gamma_*) \cup \partial\Omega(\gamma_*)$$

сл., по (2.10.3), (2.10.4), (2.10.6) $\Rightarrow$

$$\inf_{x \in \omega_*} Q(x) = \alpha \qquad (2.10.8)$$

По лемме 2.9.2 inf в (2.10.8) достигается, т. е. $\exists x_* \in \omega_* : Q(x_*) = \alpha$. В силу (2.10.4) и (2.10.6) $x_* \in \Omega(\gamma_*) \subset \Omega$. В случае $\partial\Omega(\gamma_*) \neq \varnothing$ теорема доказана.

II. Пусть $\partial\Omega(\gamma_*) = \varnothing$. Нетрудно показать, что

$$\omega_* = \Omega(\gamma_*)$$

$\Rightarrow$ из (2.10.3) и леммы 2.9.2 следует разрешимость задачи (2.10.1)

Что и требовалось доказать.

2.11 Основная лемма нелинейного программирования

$$a_i(x) = 0, \quad i \in I \tag{2.11.1}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет системе (2.11.1)

Лемма 2.11.1 *(основная нелинейного программирования)*
Пусть функции $a_i, i \in I$, непрерывно дифференцируемы в окрестности x_0 и $a_i'(x_0), i \in I$ — линейно независимы. (Условие регулярности). Тогда
$\forall g_0 \neq \mathbb{O} : \left\langle g_0, a_i'(x_0) \right\rangle = 0, i \in I \quad \exists x = x(t)$ *— кривая, непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $t = 0$ и удовлетворяющая:*

$$x(0) = x_0$$

$$x'(0) = g_0$$

$$a_i(x(t)) = 0, \quad t \in (-\delta, \delta), \ \forall i \in I \tag{2.11.2}$$

<-!-РИСУНОК-!->

Доказательство.
Анализ: пусть $x(t)$ существует.

$$A(x) = \{a_i(x)\}_i \in I$$

$$A'(x) = \left\{a_i'(x)\right\}_i \in I \text{ — матрица Якоби}$$

По цепному правилу:

$$[a_i(x(t))]' = \left\langle a_i'(x(t)), x'(t) \right\rangle$$

Для матрицы:

$$[A(x(t))]' = A'(x(t))x'(t) \tag{2.11.3}$$

$$(2.11.2): \left.\begin{matrix} [a_i(x(t))]' = 0 \\ x(0) = x_0 \end{matrix}\right\} t \in (-\delta, \delta) \tag{3'}$$

(3') $\Rightarrow$ (2.11.2) ?
По теореме о среднем

$$a_i(x(t)) = a_i(x(0)) + \underbrace{\left\langle a_i'(x(\tau_i)), x'(\tau_i) \right\rangle}_{=0 \text{ по } (3')} > t$$

τ — какая-то средняя точка $(0; t)$ при $t \in (-\delta, \delta)$

$$x(0) = x_0, \quad a(x_0) = 0$$

сл. $a_i(x(t)) = 0$ при $t \in (-\delta, \delta)$
сл. (3') $\Rightarrow$ (2.11.2)

$$A'(x_0)g_0 = \mathbb{O}$$

$$a_i'(x) \text{ — линейно независимы} \quad \Rightarrow \quad rank A'(x_0) = |I|$$

$$\Rightarrow \exists J \subset N : |J| = |I|, A'(x_0)[I, J] \text{ — квадратная, неособая}$$

$$A'(x_0)[I, J] \times g_0[J] + A'(x_0)[I, N \subset J] \times g_0[N \subset J] = \mathbb{O}$$

$$\Rightarrow g_0[J] = -(A'(x_0)[I, J])^{-1} \times A'(x_0)[I, N \setminus J] \times g_0[N \setminus J] \tag{2.11.4}$$

$$(3') = A'(x)[I, J] \times x'[J] + A'(x)[I, N \setminus J] \times x'[N \setminus J] = \mathbb{O}[I]$$

$$x'(t)[N \setminus J] = g[N \setminus J]$$

$$\begin{cases} x'(t)[J] = -(A'(x)[I, J])^{-1} A'(x)[I, N \setminus J] \times g_0[N \setminus J] \\ \quad x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.11.5}$$

Правая часть непрерывна в окрестности начального приближения $(0, x_0)$. При $x = x_0$ матрица $A'(x_0)[I, J]$ — обратима $\Rightarrow$ $det(A'(x)[I, J])$ — отличен от нуля в окрестности точки x_0. Сл., $(A'(x)[I, J])^{-1}$ непрерывна в окрестности точки x_0. По теореме Пеано (2.11.5) имеет решение в окрестности точки $t = 0$. Покажем, что это требуемая кривая.
(2.11.5) $\Rightarrow$ $(3')$ (вместо $g_0[N \setminus J]$ подставим $x'(t)[N \setminus J]$).

$$x'(0) = g_0(?)$$

В (2.11.5) подставим $t = 0$:

$$\left.\begin{matrix} x'(0)[N \setminus J] = g_0[N \setminus J] \\ x'(0)[J] = g_0[J] \end{matrix}\right\} \Rightarrow x'(0) = g_0$$

Что и требовалось доказать.

2.12 Теорема Куна–Таккера в дифференциальной форме

$$f(x) \to \inf \tag{2.12.1}$$

$$\Omega \begin{cases} a_i(x) \geq 0, & i \in M_1 \\ a_i(x) = 0, & i \in M_2 \\ x \in U \subset \mathbb{R}^N \end{cases}$$

U — открытое множество. $f, a_i \in C^{(1)}(U)$

$$x \in \Omega : M_1(x) = \{i \in M_1 | a_i(x) = 0\}$$

$I(x) = M_1(x) \cup M_2$ — множество индексов активных ограничений.

<-!-РИСУНОК-!->

$$a_i(x) > 0, \quad i \in M \setminus I(x) = M_1 \setminus M_1(x)$$

Определение 2.12.1 $x_* \in \Omega$ *наз. точкой локального минимума.*

$$\exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_*) \quad \forall x \in \Omega \cap U_\delta(x_*)$$

$$U_\delta(x_*) = \{x : \|x - x_*\| < \delta\}$$

Теорема 2.12.1 (Куна - Таккера) $x_* \in \Omega$ *— точка локального минимума в задаче (2.12.1) и ограничения в ней регулярны. ($a_i'(x_*)$ ЛНЗ при $i \in I(x_*)$).*

$$\Rightarrow \exists u_* = u_*[I(x_*)]$$

$$f'(x_*) = \sum_{i \in I(x_*)} u_*[i] a_i'(x_*) \tag{2.12.2}$$

$$u_*[i] \geq 0, \quad i \in M_1(x_*) \tag{2.12.3}$$

Доказательство.
$M_1(x_*) \neq \varnothing$ (иначе только проще).
От противного:
(2.12.2), (2.12.3) — линейная система относительно u_*. Если она не совместна, то $\exists g_0$:

$$\left\langle a_i'(x_*), g_0 \right\rangle \geq 0, \quad i \in M_1(x_*)$$

$$\left\langle a_i'(x_*), g_0 \right\rangle = 0, \quad i \in M_2$$

$$\left\langle f'(x_*), g_0 \right\rangle < 0 \tag{2.12.4}$$

$$g_0 \backsim -u_0$$

$$I_0(x_*) = \left\{i \in I(x_*) : \left\langle a_i'(x_*), g_0 \right\rangle = 0\right\}$$

$$M_2 \subset I_0(x_*) \subset I(x_*)$$

$$\Rightarrow \left\langle a_i'(x_*), g_0 \right\rangle > 0 \text{ при } i \in I(x_*) \setminus I_0(x_*) \tag{2.12.5}$$

$$a_i(x) = 0, i \in I_0(x_*) \tag{2.12.6}$$

x_* удовлетворяет (2.12.6), $a_i(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности x_*.

$$a_i'(x_*) \quad i \in I_0(x_0), \text{ ЛНЗ } [I_0(x_*) \subset I_0(x_0)]$$

$$\left\langle a_i'(x_*), g_0 \right\rangle = 0, \quad i \in I_0(x_*) \quad [q_0 \neq \mathbb{O} \text{ в силу } (2.12.4)]$$

По основной лемме нелинейного программирования $x = x(t)$, гладкая в окрестности $t = 0$.

$$x(0) = x_*, \quad x'(0) = g_0, \quad a_i(x(t)) = 0, \quad i \in I_0(x_*), t \in (-\delta, \delta)$$

$$x(t) \in \Omega \text{ при малых } t > 0(?)$$

На $I_0(x_*)$ определение выполнено как равенство. $i \in I(x)$.

$i \in I_0(x_*)$ – ограничения выполнены как равенства
$i \in I(x_*) \setminus I_0(x_*)$:

$$a_i(x(t)) = a_i(x(0)) + \langle a_i'(x(0)), x'(0)\rangle t + o(t) =$$

$$= \underbrace{a_i(x_*)}_{=0} + \langle a_i'(x_*), g_0\rangle t + o(t) = \langle a_i'(x_*), g_0\rangle t + o(t) =$$

$$= t\Big[\underbrace{\langle a_i'(x_*), g_0\rangle}_{>0 \text{ по } (2.12.5)} + \frac{o(t)}{t}\Big] > 0 \text{ при малых } t > 0$$

$i \in M \setminus I(x_*)$:

$$\underbrace{a_i(x_*) > 0}_{x(0)=x_*} \Rightarrow a_i(x(t)) > 0$$

Итак, $x(t) \in \Omega$ при малых $t > 0$.

$$f(x(t)) = f(\underbrace{x(0)}_{=x_*}) + \langle f'(x(0)), \underbrace{x'(0)}_{=g_0}\rangle + o(t) =$$

$$= f(x_*) + t\Big[\underbrace{\langle f'(x_*), g_0\rangle}_{<0 \text{ по } (2.12.4)} + \frac{o(t)}{t}\Big] < f(x_*) \text{ при малых } t > 0$$

Это противоречит тому, что x_* – точка локального минимума.

Что и требовалось доказать.

Замечание 2.12.1 *Условия Куна-Таккера* (2.12.2), (2.12.3) $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \exists u_* = u_*[M] : \quad f'(x_*) = \sum_{i \in M} u_*[i] a_i'(x_*), \tag{2.12.7}$$

$$u_*[i] a_i(x_*) = 0, \quad u_*[i] \geq 0, \quad i \in M_1$$

$$(2.12.2),\ (2.12.3) \Rightarrow u_*[i] = 0, \quad i \in M \setminus I(x_*) = M_1 \setminus M_1(x_*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2.12.7), \text{ так как } M_1 = \underbrace{M_1(x_*)}_{\text{здесь } a_i = 0} \cup \underbrace{(M_1 \setminus M_1(x_*))}_{\text{здесь } u_*[i]=0}$$

(2.12.7) $\Rightarrow u_*[i] = 0$ при $i \in M \setminus I(x_*) = M_1 \setminus M_1(x_*)$ в силу условия дополнительности $\Rightarrow$ (2.12.2), (2.12.3)

$$L(x, u) = f(x) - \sum_{i \in M} u[i] a_i(x) \text{ – функция Лагранжа}$$

Первое из условий (2.12.7): $L_x'(x_*, u_*) = \mathbb{O}$

2.13 Пример задачи нелинейного программирования, в единственном решении которой не выполняется условие Куна–Таккера

Пример 2.13.1

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a_1(x) := x_1^3 - x_2 \geq 0 \\ a_2(x) := -x_1^4 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

<-!-РИСУНОК-!->

$$f_1(x) := x_1 \to \inf$$

$$x \in \Omega$$

Единственное решение: $x_* = (0, 0)$
$I(x_*) = \{1, 2\}$

$$f_1'(x) = (1, 0); \quad f_1'(x_*) = (1, 0)$$

$$a_1'(x) = (3x_1^2, -1); \quad a_1'(x_*) = (0, -1)$$

$$a_2'(x) = (-4x_1^3, 1); \quad a_2'(x_*) = (0, 1)$$

$f_1'(x_*) = u_1^* a_1'(x_*) + u_2^* a_2'(x_*)$ не выполняется ни при каких U_i (см. первую компоненту)
Причина: ограничения в x_* нерегулярны (градиенты линейно зависимы).

$$f_2(x) := x_2 \to \inf$$

$$x \in \Omega$$

Единственное решение: $x_* = (0, 0)$

$$f_2'(x_*) = (0, 1); \quad a_i \text{ те же}$$

$$f_2'(x_*) = a_2'(x_*), \quad u_1^* = 0,\ u_2^* = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ условия Куна-Таккера выполнены

2.14 Теорема о достаточности условий Куна–Таккера. Пример

$$f(x) \to \inf \qquad (2.14.1)$$

$$\Omega \begin{cases} a_i(x) \geq 0, & i \in M_1 \\ a_i(x) = 0, & i \in M_2 \\ x \in U \end{cases}$$

$U \in \mathbb{R}^N$ – открытое множество

Определение 2.14.1 $x_* \in \Omega$ – *точка строгого локального минимума:*

$$\exists \delta > 0: \quad f(x) > f(x_*) \quad x \in \Omega \cap \dot{U}_\delta(x_*).$$

Предположим, что в точке $x_* \in \Omega$ выполнены условия Куна-Таккера:

$$\exists u_* = u_*[M]: \quad f'(x_*) = \sum_{i \in M} u_*[i] a_i'(x_*),$$

$$u_*[i] a_i(x_*) = 0, \quad u_*[i] \geq 0, \quad i \in M_1$$

$$M_1^+(x_*) := \{i \in M_1(x_*) \mid u_*[i] > 0\}$$

$$I^+(x_*) := M_1^+(x_*) \cup M_2$$

<-!-РИСУНОК-!->

$$u_*[i] = 0, \quad i \in M_1 \setminus I^+(x_*) = M_1 \setminus M_1^+(x_*) \qquad (2.14.2)$$

Конус G_*:

$$\langle a_i'(x_*), g \rangle = 0, \quad i \in I^+(x_*)$$

$$\langle a_i'(x_*), g \rangle \geq 0, \quad i \in I(x_*) \setminus I^+(x_*)$$

Теорема 2.14.1 *В точке $x_* \in \Omega$ выполнены условия Куна-Таккера, $G_* = \{\mathbb{O}\} \Rightarrow x_*$ – точка строгого локального минимума.*

Доказательство.
От противного.

$$\exists \{y_k\}, \; y_k \in \Omega, y_k \neq x_*, \; y_k \to x_*, \; f(y_k) \leq f(x_*)$$

$$y_k = x_* + \lambda_k g_k, \; g_k = \frac{y_k - x_*}{\|y_k - x_*\|}, \; \lambda_k = \|y_k - x_*\|;$$

$\|g_k\| = 1$, $\lambda_k \to +0$ Из $\{g_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность: Пусть $g_k \to g_*$, $\|g_*\| = 1$
(!) $g_* \in G_*$; получим противоречие.
$i \in M_1(x_*)$:
$0 \leq \underbrace{a_i(y_k)}_{\geq 0} - \underbrace{a_i(x_*)}_{=0} = \langle a_i'(\eta_k), g_k \rangle \lambda_k$
$i \in M_2$: $0 = a_i(y_k) - a_i(x_*) = \langle a_i'(\eta_k), g_k \rangle \lambda_k$
$0 \geq f(y_k) - f(x_*) = \langle f'(y_k), g_k \rangle \lambda_k$
Делим на $\lambda_k > 0$, $k \to +\infty$:
$\langle a_i'(x_*), g_* \rangle \geq 0, \; i \in M_1(x_*)$
$\langle a_i'(x_*), g_* \rangle = 0, \; i \in M_2$
$\langle f'(x_*), g_* \rangle \leq 0$
$I(x_*) = M_1(x_*) \cup M_2; \; I(x_*) \setminus I^+(x_*) = M_1(x_*) \setminus M_1^+(x_*)$
(!)$\langle a_i'(x_i), g_* \rangle = 0, i \in M_1^+(x_*)$
$0 \geq \langle f'(x_*), g_* \rangle \overset{(\text{Кун-Таккер})}{=} \sum_{i \in M} u_*[i] \langle a_i'(x_*), g_* \rangle =$
$\overset{(2.14.2)}{=} \sum_{i \in I^+(x_*)} u_*[i] \underbrace{\langle a_i'(x_*), g_* \rangle}_{=0 \text{ при } i \in M_2} =$
$\sum_{i \in M_1^+(x_*)} \underbrace{u_*[i]}_{>0} \underbrace{\langle a_i'(x_*), g_* \rangle}_{\geq 0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle a_i'(x_*), g_* \rangle = 0, \; i \in M_1^+(x_k)$
$g_* \in G_*$; противоречие (ибо $g_* \neq \mathbb{O}$)

Что и требовалось доказать.

Следствие 2.14.1 *$x_* \in \Omega$, выполняются условия Куна-Таккера, $|I^+(x_*)| = |N|$, $a_i'(x_*)$, $i \in I^+(x_*)$, ЛНЗ $\Rightarrow$
$\Rightarrow x_*$ – точка строгого локального мин.*

Доказательство.
$G_* = \{\mathbb{O}\}$, т.к. $\langle a_i'(x_*), g \rangle = 0, \; i \in I^+(x_*) \Rightarrow$
$\Rightarrow g = \mathbb{O}$
(Количество уравнений равно размерности g;
в силу лин. независимости матрица системы неособая)

Что и требовалось доказать.

Пример 2.14.1 $f(x) = -x_1 \to inf$
$a_1(x) := x_1^3 - x_2 \geq 0$
$a_2(x) := -x_1^4 + x_2 \geq 0$
$x \in \mathbb{R}^2$

<-!-РИСУНОК-!->

$x_* = (1, 1)-$ единственное решение; $I(x_*) = \{1, 2\}$
$f'(x_*) = (-1, 0)$
$a_1'(x_*) = (3, -1)$
$a_2'(x_*) = (-4, 1)$

<-!-РИСУНОК-!->

$f'(x_*) = a_1'(x_*) + a_2'(x_*); \; u_* = \underbrace{(1, 1)}_{\text{множители Лагранжа}}$
выполняются условия Куна-Таккера.
$I^+(x_*) = \{1, 2\}$, $|I^+(x_*)| = 2 = |N|$
$a_1'(x_*)$ и $a_2'(x_*)$ ЛНЗ.
По следствию x_* — точка строгого локального min.
Градиент — направление наибольшего возрастания функции.

$G_* \neq \{\mathbb{O}\}$
$F \in C^1(U)$
F дважды дифф. в т. $x \in U$, если $\exists D = D[N, N]$,
$F'(x + h) = F'(x) + Dh + o(\|h\|)$,
$\frac{O(\|h\|)}{\|h\|} \to \mathbb{O} \quad (h \to \mathbb{O})$
Необходимо $D[i, j] = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x[i] \partial x[j]}$; $D = F''(x)$
$F \in C^2(U)$, если $F''(x)$ непр. на U

2.15 Достаточное условие оптимальности второго порядка в задаче нелинейного программирования

$$F(x+h) = F(x) + \langle F'(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle F''(x+\vartheta h)h, h\rangle \qquad (2.15.1)$$

Теорема 2.15.1 *$x_* \in \Omega$, выполнены условия Куна-Таккера*
$(L'(x_*, u_*) = \mathbb{O}$,
$u_*[i]a_i(x_*) = 0,\ u_*[i] \geq 0,\ i \in M_1)$
и

$$\langle L''_{xx}(x_*, u_*)g_*, g_*\rangle > 0,\ \ g \in G_*,\ \ g \neq \mathbb{O} \Rightarrow \qquad (2.15.2)$$

$\Rightarrow x_*$ — *точка строгого лок. min.*

Доказательство.
От противного.
Пусть $\exists \{y_k\},\ y_k \in \Omega,\ y_k \neq x_*,\ y_k \to x_*,\ f(y_k) \leq f(x_*)$
$y_k = x_* + \lambda_k g_k,\ g_k \to g_*\ \|g_k\| = 1$ и т.д.
Известно, что $g_* \in G_*,\ \|g_*\| = 1$.
По условию теоремы (2.15.2) $\langle L''_{xx}(x_*, u_*)g_*, g_*\rangle > 0$
(!) $\langle L''_{xx}(x_*, u_*)g_*, g_*\rangle \leq 0$
Вместе с этим имеем

$$L(y_k, u_*) - L(x_*, u_*) = \underbrace{f(y_k) - f(x_*)}_{\leq 0} -$$

$$-\sum \underbrace{i \in M}_{\text{или} i\in M_1} \underbrace{u_*[i]}_{\geq 0}(\underbrace{a_i(y_k)}_{\geq 0} - a_i(x_*)) \leq 0$$

$u_*[i]a_i(x_*) = 0, i \in M_1$

$$0 \geq L(y_k, u_*) - L(x_*, u_*) \overset{(2.15.1)}{=} \langle \underbrace{L'_x(x_*, u_*)}_{=\mathbb{O}}, g_k\rangle\lambda_k +$$

$$+\tfrac{1}{2}\langle L''_{xx}(x_* + \nu_k\lambda_k g_k, u_*)g_k, g_k\rangle\lambda_k^2$$

Делим на $\frac{1}{2}\lambda_k > 0;\ k \to +\infty$.
$\langle L''_{xx}(x_*, u_*)g_*, g_*\rangle \leq 0$. Противоречие (2.15.2).

Что и требовалось доказать.

2.16 Необходимое условие оптимальности второго порядка в задаче нелинейного программирования

$$f(x) \to \inf \qquad (2.16.1)$$

$$\Omega \begin{cases} a_i(x) \geq 0,\ i \in M_1 \\ a_i(x) = 0,\ i \in M_2 \\ \qquad x \in U \end{cases}$$

U — открытое множество в $\mathbb{R}^N$
$f,\ a_i \in C^2(U)$

Теорема 2.16.1 *$x_* \in \Omega$ — точка локального минимума, ограничения в ней регулярны (градиенты активных ограничений линейно независимы).*
Тогда выполняются условия Куна-Таккера

$$\left[\exists u_* :\ L'_x(x_*, u_*) = \mathbb{O},\ u_*[i]a_i(x_*) = 0,\ u_*[i] \geq 0,\ i \in M_1\right].$$

Кроме того, выполняется

$$\langle L''_{xx}(x_*, u_*)g, g\rangle \geq 0\ \forall g \in G_* \qquad (2.16.2)$$

$$G_* : \quad \begin{matrix} \langle a'_i(x_*), g\rangle = 0,\ i \in I^+(x_*) \\ \langle a'_i(x_*), g\rangle \geq 0,\ i \in I(x_*) \setminus I^+(x_*) \end{matrix}$$

$$u_*[i] = 0,\ i \in M \setminus I^+(x_*) \qquad (2.16.3)$$

Доказательство.
Фиксируем $g \in G_*,\ g \neq \mathbb{O}$. Докажем, что выполнено (2.16.2).

$$I_g(x_*) = \left\{i \in I(x_*) \mid \langle a'_i(x_*), g\rangle = 0\right\}$$

$$M_2 \subset I^+(x_*) \subset I_g(x_*) \subset I(x_*) \qquad (2.16.4)$$

$$\langle a'_i(x_*), g\rangle > 0,\ i \in I(x_*) \setminus I_g(x_*) \qquad (2.16.5)$$

Рассмотрим систему

$$a_i(x) = 0,\ i \in I_g(x_*) \qquad (2.16.6)$$

x_* удовлетворяет (2.16.6), $\quad a'_i(x_*),\ i \in I_g(x_*)$, линейно независимы
По основной лемме нелинейного программирования
$\exists$ гладкая кривая $x = x(t)$:
$x(0) = x_*,\ x'(0) = g_*,\quad a_i(x(t)) = 0,\ i \in I_g(x_*)$, при малых t.
Докажем, что $x(t) \in \Omega$ при малых $t > 0$.
При $i \in I_g(x_*)$ — равенство (в ограничениях).
При $i \in I(x_*) \setminus I_g(x_*)$:

$$a_i(x(t)) = a_i(x(0)) + \langle a'_i(x(0)), x'(0)\rangle t + o(t) = t\left[\underbrace{\langle a'_i(x_*), g\rangle}_{>0} + \frac{o(t)}{t}\right] \text{ при малых } t > 0$$

(последнее равенство — при $g := x'(0)$ и поскольку $a_i(x_*) = 0$)

$$i \in M \setminus I(x_*) :\ a_i(x_*) > 0 \Rightarrow a_i(x(t)) > 0 \text{ при малых } t > 0$$

Установлено, что $x(t) \in \Omega$ при малых $t > 0$.

$$L(x(t), u_*) = f(x(t)) - \sum_{i\in M} u_*[i]a_i(x(t)) = f(x(t)) - \sum_{i\in I^+(x_*)} u_*[i] \underbrace{a_i(x(t))}_{=0,\text{ ибо } I^+(x_*)\subset I_g(x_*)}$$

$$= f(x(t))$$

$$L(x_*, u_*) = f(x_*) \overset{\text{лок. мин.}}{\leq} f(x(t)) = L(\underbrace{x(t)}_{\text{в окрестности } x_*}, u_*) =$$

$$= L(x_*, u_*) + \langle L'_x(x_*, u_*), x(t) - x_*\rangle + \frac{1}{2}\langle L''_{xx}(\xi(t), u_*)\cdot(x(t) - x_*), x(t) - x_*)\rangle,$$

$$\xi(t) \in [x_*, x(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle L''_{xx}(\xi(t), u_*)\frac{x(t) - x(0)}{t}, \frac{x(t) - x(0)}{t}\right\rangle \geq 0 \text{ при малых } t > 0$$

$$t \to +0 : \quad \langle L''_{xx}(x_*, u_*)g, g\rangle \geq 0$$

$$\left(\frac{x(t) - x(0)}{t} \underset{t\to+0}{\longrightarrow} x'(0) = g\right)$$

Что и требовалось доказать.

2.17 Пример на использование условий оптимальности второго порядка в задаче нелинейного программирования

Пример 2.17.1

$$f(x) := (x_1-1)^2 + x_2^2 \to \inf$$

$$a(x) := -x_1 + \alpha x_2^2 \geq 0$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ — *параметр*

$x_* = (0,0)$ — единственное решение
Ограничение активно

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-1) \\ 2x_2 \end{pmatrix}; \quad f'(x_*) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f''(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a'(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\alpha x_2 \end{pmatrix}; \quad a'(x_*) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (условие регулярности выполнено)}$$

$f'(x_*) = 2a'(x_*)$ — условие Куна-Таккера выполнено с $u_* = 2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$I^+(x_*) = I(x_*)$
$G_* : \quad \langle a'(x_*), g\rangle = 0 \iff g_1 = 0$
$G_* = \{g = (0, g_2)\}$

$$a''(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$L''_{xx}(x_*, u_*) = f''(x_*) - u_* a''(x_*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-4\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{На } G_* \ \langle L''_{xx}(x_*, u_*)g, g\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-4\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (2-4\alpha)g_2^2$$

$\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \langle L''_{xx}(x_*, u_*)g, g\rangle > 0 \ \forall g \in G_* \setminus \{\mathbb{O}\} \Rightarrow x_*$ — точка строгого локального минимума по теореме 2.15.1.
$\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow \langle L''_{xx}(x_*, u_*)g, g\rangle < 0 \ \forall g \in G_* \setminus \{\mathbb{O}\}$, т.е. условие оптимальности второго порядка не выполнено.
Значит, не является точкой строгого локального минимума по теореме 2.16.1.
$\alpha = \frac{1}{2}$ — ?

3 Вариационное исчисление

3.1 Основная лемма вариационного исчисления

Лемма 3.1.1 $u \in C[a,b]$, $\int_a^b uh'\,dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b] \Rightarrow u = const$ *на* $[a,b]$

Доказательство.

$$u_1(t) = \int_a^t u(\tau)\,d\tau$$

Найдем $p_1(t) = c_0 t + c_1 : \quad p_1(a) = u_1(a), p_1(b) = u_1(b)$

$$h(t) := u_1(t) - p_1(t);\ h(a) = h(b) = 0$$

$$h \in C^1[a,b] :\ h'(t) = u(t) - c_0,\ h \in C_0^1[a,b]$$

$$\int_a^b [u(t)-c_0]^2\,dt = \int_a^b [u(t)-c_0]h'(t)\,dt = \underbrace{\int_a^b u(t)h'(t)\,dt}_{=0} - \underbrace{\int_a^b c_0 h'(t)\,dt}_{=0,\text{ ибо } h(a)=h(b)} \Rightarrow u(t) \equiv c_0$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 3.1.2 Основная лемма вариационного исчисления.
$u, v \in C[a,b]$,
$\int_a^b \{uh' + vh\}\,dt = 0 \ \forall h \in C_0^1[a,b] \Rightarrow u \in C^1[a,b]$ *и* $u'(t) = v(t)$ *на* $[a,b]$

Доказательство.

$$g(t) = \int_a^b v(\tau)\,d\tau$$

$$\int_a^b vh\,dt = \int_a^b g'h\,dt = \int_a^b h\,dg = \underbrace{hg|_a^b}_{=0,\text{ ибо } h(a)=h(b)=0} - \int_a^b gh'\,dt =$$

$$= -\int_a^b gh'\,dt$$

$$0 = \int_a^b \{uh' + vh\}\,dt = \int_a^b (u-g)h'\,dt \forall h \in C_0^1[a,b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t) - g(t) \equiv const, u(t) = g(t) + const \Rightarrow u'\ \exists, u' = v \text{ на } [a,b].$$

Что и требовалось доказать.

3.2 Квадратичная вариационная задача. Критерий оптимальности

$$p, g, f \in C[a, b]$$

$$Q(x) = \int_a^b \{p(t)[x'(t)]^2 + g(t)[x(t)]^2 - 2f(t)x(t)\}dt, x \in C^1[a, b]$$

$$Q(x) \to \inf \tag{3.2.1}$$

$$\Omega : \ x(a) = A, x(b) = B, x \in C^1[c, b]$$

<-!-РИСУНОК-!->

$x \in \Omega$ – план.
$x_* \in \Omega$ – решение (оптимальный план): $Q(x) \geq Q(x_*) \quad \forall x \in \Omega$
$C_0^1[a, b] = \{L \in C^1[a, b] | h(a) = 0, \ h(b) = 0\}$ – множество допустимых вариаций

$$x \in \Omega, \ h \in C_0^1[a, b] \ \Rightarrow \ x + \alpha h \in \Omega \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$Q(x + \alpha h) = \int_b^a \{p(x' + \alpha h')^2 + g(x + \alpha h)^2 - 2f(x + \alpha h)\}dt =$$

$$= Q(x) + 2L \int_a^b \{px'h' + gxh - fh\}dt + L^2 \int \int_a^b \{p(h')^2 + gh^2\}dt$$

$l(x, h) = \int_a^b \{px'h' + (gx - f)h\}dt$ – линейный по h функционал

$$[\, l(x; -h) = -l(x; h) \,]$$

$$D(h) = \int_b^a \{p(h')^2 + gh^2\}dt$$

$$Q(x + \alpha h) = Q(x) + 2\alpha l(x; h) + \alpha^2 D(h) \tag{3.2.2}$$

Лемма 3.2.1 *Если* $\exists h_0 \in C_0^1[a, b] : D(h_0) < 0,$ *то*

$$\inf_{x \in \Omega} Q(x) = -\infty.$$

Доказательство.
Фиксируем $x_0 \in \Omega$.
$Q(x_0 + \alpha h_0)$ – квадратный трехчлен отн. α, коэффициент у α^2 отрицательный $\Rightarrow \inf Q(x_0 + \alpha h_0) = -\infty$

Что и требовалось доказать.

$$D(h) \geq 0 \quad \forall h_0 \in C_0^1[a, b] \tag{3.2.3}$$

Очевидное достаточное условие: $p(t) \geq 0, g(t) \geq 0$ на $[a, b]$,
считаем его выполненным.

Теорема 3.2.1 $x_* \in \Omega$ – *оптимальный план* (3.2.1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow l(x_*; h) = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b]. \tag{3.2.4}$$

Доказательство.
Необходимость:

$$0 \leq Q(x_* + \alpha h) - Q(x_*) \ \underbrace{\overset{(3.2.2)}{=}}_{h \in C_0^1[a,b]} \ 2\alpha l(x_*; h) + \alpha^2 D(h).$$

Поделим на

$$2\alpha > 0, \quad \alpha \to +0 : \ l(x_*; h) \geq 0$$

$$h \in C_0^1[a, b] \Leftrightarrow -h \in C_0^1[a, b]$$

Имеем $l(x_*; -h) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ l(x_*; h) \leq 0$
Достаточность:
Фиксируем $x \in \Omega, \ h = x - x_*; \ h \in C_0^1[a, b]$.

$$Q(x) = Q(x_* + h) \overset{(3.2.2)}{=} Q(x_*) + \underbrace{2l(x_*; h)}_{=0} + \underbrace{D(h)}_{\geq 0} \geq Q(x_*)$$

Что и требовалось доказать.

$$(3.2.4) : \int_a^b \{px_*'h' + (gx_* - f)h)\} \ dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b] \tag{3.2.5}$$

Теорема 3.2.2

$$x_* \in \Omega - \textit{оптимальный план} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow px_*' \in \ C^1[a, b] \ \textit{и} \ - (px_*')' + gx_* = f. \tag{3.2.6}$$

Доказательство.
Необходимость:
Следует из (3.2.5) и основной леммы.
Достаточность:
Покажем, что из условий теоремы следует (3.2.5).

$$\int_a^b px_*'h' \ dt = \int_a^b px_*'dh = \underbrace{px_*'h|_a^b}_{=0} - \int_a^b (px_*')'h \ dt$$

$$\int_a^b \{px_*'h' + (gx_* - f)h)\} \ dt = \int_a^b \{-(px_*')' + gx_* - f\}h \ dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b]$$

x_* — оптимальный план по теореме (критерию).

Что и требовалось доказать.

3.3 Необходимое условие Лежандра неотрицательной определенности интегральной квадратичной формы

Теорема 3.3.1 (Лежандра).
Если D — неотрицательно определенная интегральная квадратичная форма, то необходимо

$$p(t) \geq 0 \text{ на } [a, b] \qquad (3.3.1)$$

(Именно условие (3.3.1) называется условием Лежандра.)

Доказательство.
(От противного): $\exists t_0 \in (a, b) : p(t_0) < 0$

$$\varepsilon_0 = -p(t_0)/2,\ \exists \delta_0 > 0\, |p(t) - p(t_0)| \leq \varepsilon_0 \text{ на } [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$$

$$[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset [a, b] \Rightarrow$$

$$p(t) \leq p(t_0) + \varepsilon_0 = -\varepsilon_0 \Rightarrow p(t) \leq -\varepsilon_0 \text{ на } [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$$

$$\delta \in (0, \delta_0] :$$

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}(1 + \cos(\frac{\pi}{\delta}(t - t_0))),\ t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \\ 0, \text{ иначе} \quad <! - PICTURE -! > \end{cases}$$

$$h'_\delta(t) = -\sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \sin(\frac{\delta}{\pi}(t - t_0)) \text{ на } (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

$$h'_\delta(t) \to 0 \text{ при } t \to t_0 - \delta,\ t \to t_0 + \delta$$

$$h_\delta(t) \in C_0^1[a, b]$$

$$0 \leq h_\delta(t) \leq 2\sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \text{ на } [a, b]$$

$$D(h_\delta) = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} p(h'_\delta)^2\, dt + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g(h_\delta)^2\, dt \leq -\varepsilon\frac{\pi}{\delta}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \sin^2(\frac{\pi}{\delta}(t-t_0))\, dt + \frac{4\delta}{\pi}\int_a^b |g|\, dt =$$

$$= \underbrace{-\varepsilon_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 u\, du}_{<0} + \underbrace{\frac{4\delta}{\pi}\int_a^b |g|\, dt}_{\to 0 \text{ при } \delta \to +0} < 0 \text{ при малых } \delta > 0$$

Получили противоречие

Что и требовалось доказать.

$p(t) > 0$ на $[a, b]$ — усиленное условие Лежандра

3.4 Критерий неотрицательной определенности интегральной квадратичной формы. Доказательство достаточности

$$D(h) = \int_a^b \{p(h')^2 + gh^2\}\, dt,\ h \in C_0^1[a, b] g \in C[a, b],\ p \in C^1[a, b],\ \underbrace{p(t) > 0}_{\text{усиленное условие Лежа}} \qquad (3.4.1)$$

Рассмотрим

$$(ph')' = gh \qquad (3.4.2)$$

$$ph'' + p'h' - gh = 0 \text{ на } [a, b]$$

$$h'' + \frac{p'}{p}h' - \frac{g}{p}h = 0 \text{ — уравнение Якоби} \qquad (2')$$

При любых начальных условиях

$$L(c) = A,\ h'(c) = A',\ c \in [a, b]$$

задача (2') имеет единственное решение.
Решение, удовлетворяющее условию $h_0(a) = 0$, $h'_0(a) = 1$, называется главным решением уравнения Якоби.

Теорема 3.4.1 (Якоби).
D неотрицательно определена на
$C_0^1[a, b] \Leftrightarrow \underbrace{h_0(t) > 0 \text{ на } (a, b)}_{\text{условие Якоби}}$

Доказательство.
Достаточность:
(!) (Выполнено условие Якоби $\Rightarrow D(h) = \int_a^b p(h' - \frac{h}{h_0}h'_0)^2\, dt$)

$$\frac{h}{h_0} \text{ непр. на } [a, b]\ (h \in C_0^1[a, b])$$

$$\lim_{t \to a+0} \frac{h(t)}{h_0(t)} = \lim_{t \to a+0} \frac{h'(t)}{h'_0(t)} = h'(a)$$

$\lim\limits_{t \to b-0} \frac{h(t)}{h_0(t)}$: $\quad (h_0(t) > 0$ на $(a, b))$

1. $h_0(b) > 0 \quad \lim = \frac{h(b)}{h_0(b)}$
2. $h_0(b) = 0$, но тогда $h'_0(b) \neq 0$, иначе по теореме единственности $h_0(t) \equiv 0$ (для решения уравнения Якоби)

$$\lim = \lim_{t \to b-0} \frac{h(t)}{h_0(t)} = \frac{h'(b)}{h'_0(b)}$$

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(h' - \frac{h}{h_0}h'_0\right) dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p(h')^2\, dt - 2\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph'_0}{h_0}hh'\, dt + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(\frac{h'_0}{h_0}\right) h^2\, dt \qquad (3.4.3)$$

$$-2\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph'_0}{h_0}hh'\, dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} -\frac{ph'_0}{h_0}\, dh^2 =$$

$$= -\frac{ph'_0}{h_0}h_0^2\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left(\frac{ph'_0}{h_0}\right)' h^2\, dt$$

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left(\frac{ph'_0}{h_0}\right)' h^2\, dt = \underbrace{\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{(ph'_0)'}{h_0}h^2\, dt}_{\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} qh^2\, dt} - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left(\frac{(ph'_0)}{h_0}\right)^2 h^2\, dt$$

Подставим в (3.4.3):

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(h' - \frac{h}{h_0}h'_0\right) dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p(h')^2\, dt + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} gh^2\, dt - \frac{ph'_0}{h_0}h_0^2\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}$$

$$\varepsilon \to +0 \text{ (учесть, что } h \in C_0^1[a, b])$$

3.5 Лемма о скруглении углов

Лемма 3.5.1 (лемма о скруглении углов).

$$\hat{h} \in C[a,b],\ \hat{h}(a) = \hat{h}(b) = 0$$

$\hat{h} \in C^1[a,\xi],\ \hat{h} \in C^1[\xi,b]$ *при некотором* $\xi \in (a,b)$

$$D(h) \geq 0 \text{ на } C_0^1[a,b] \Rightarrow D(\hat{h}) \geq 0$$

Доказательство.
$g(t) = \begin{cases} (\frac{1-|t|}{2})^2,\ t \in [-1,1] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

<-!-РИСУНОК-!->

Очевидно, что g — четная функция.
Возьмем $t \in (0,1)$ и продифференцируем:
$g'(t) = 2\frac{1-t}{2}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1-t}{2}$ $//g(t) \leq \frac{1}{4}$
$g'(+0) = -\frac{1}{2}$
В силу четности $g'(-0) = \frac{1}{2}$ и более общее заключение: $|g'(t)| \leq \frac{1}{2}$ при $t \neq 0$
Сделаем гомотетию с центром в нуле:
$g_\delta(t) = \delta g(\frac{g}{\delta}),\ \delta > 0$
$g_\delta(t) = 0$ вне $(-\delta,\delta)$
// Т.к. если $t = \delta$, то $\frac{t}{\delta} = 1$
Значит, $0 \leq g_\delta(t) \leq \frac{\delta}{4}$
$g'_\delta(t) = g'(\frac{t}{\delta})$
Следовательно, $g'_\delta(0_+) = -\frac{1}{2},\ g'_\delta(0_-) = \frac{1}{2}\ \forall\delta > 0$.
Кроме того, $|g'_\delta(t)| \leq \frac{1}{2}$ при $t \neq 0\ \forall\delta > 0$.
Введем функции $h_\delta(t) = \hat{h}(t) + \alpha_1 g_\delta(t-\varepsilon)$, где $\alpha_1 = \hat{h}'(\xi_+) - \hat{h}'(\xi_-)$, то есть скачок производной в точке ξ
$h_\delta \in C_0^1[a,b]$ при малых $\delta > 0$
//надо, чтобы $[\xi-\delta,\xi+\delta] \subset (a,b)$; *тогда* $h_\delta(a) = h_\delta(b) = 0$
Тогда проверяем, чтобы было C_0 и C^1:
$h'_\delta(\xi+0) = \hat{h}'(\xi+0) + (-\frac{1}{2})\alpha_1$
$h'_\delta(\xi-0) = \hat{h}'(\xi-0) + (\frac{1}{2})\alpha_1$
$h'_\delta(\xi+0) - h'_\delta(\xi-0) = 0$
Итак, доказано, что $h_\delta \in C_0^1[a,b]$ при малых $\delta > 0$.
Запишем: $0 \leq D(h_\delta) = \int_a^b (p[\hat{h}' + \alpha_1 g'_\delta(\cdot-\xi)]^2 + q[\hat{h} + \alpha_1 g_\delta(\cdot-\xi)]^2)dt =$
// честно возводим в квадрат
$= D(\hat{h}) + \alpha_1 \int_a^b (q[2\hat{h}g_\delta(\cdot-\xi) + \alpha_1 g_\delta^2(\cdot-\xi)])dt + \alpha_1 \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} (p[2\tilde{h}' g'_\delta(\cdot-\xi) + \alpha_1 (g'_\delta(\cdot-\xi))^2])dt =$
// вводим новые обозначения: $I_\delta^{(0)},\ I_\delta^{(1)}$
$= D(\hat{h}) + \alpha_1 I_\delta^{(0)} + \alpha_1 I_\delta^{(1)}$
Докажем, что $I_\delta^{(0)} \to 0,\ I_\delta^{(1)} \to 0$ при $\delta \to 0$
$|I_\delta^{(0)}| \leq \frac{\delta}{2}\int_a^b |q|(|\hat{h}| + |\alpha_1|\frac{\delta}{8})dt;\quad g_\delta \leq \frac{\delta}{4} \Rightarrow$ малость за счет g_δ
$|I_\delta^{(1)}| \leq \left(\int_{\xi-\delta}^{\xi} + \int_\xi^{\xi+\delta}\right)(p|\hat{h}'| + \frac{|\alpha_1|}{4})dt$; малость за счет малости интеграла
$//\alpha_1 = const$
Очевидно, что $I_\delta^{(0)} \to 0,\ I_\delta^{(1)} \to 0$ при $\delta \to 0_+$
Переходя к пределу, получаем, что $D(\hat{h}) \geq 0$

Что и требовалось доказать.

3.6 Критерий неотрицательной определенности интегральной квадратичной формы. Доказательство необходимости

Теорема 3.6.1 (Якоби).
D неотрицательно определена на
$C_0^1[a,b] \Leftrightarrow \underbrace{h_0(t) > 0 \text{ на } (a,b)}_{\text{условие Якоби}}$

Лемма 3.6.1 *Если* $\exists$ *точка* $\xi \in (a,b] : h_0(\xi) = 0$, *то* $\int_a^\xi (p(h_0')^2 + qh_0^2)\,dt = 0$.

Доказательство.
$\int_a^\xi p(h_0)^2 dt = \int_a^\xi ph_0' dh_0 = ph_0'h_0|_a^\xi - \int_a^\xi qh_0^2 dt \Rightarrow$
$\Rightarrow \int_a^\xi (p(h_0')^2 + qh_0^2)dt = ph_0'h_0|_a^\xi =$
$//ph_0'h_0|_a = 0$ *по определению*
$//ph_0'h_0|^\xi = 0$ *по условию леммы*
$=0$

Что и требовалось доказать.

Теперь доказываем необходимость в теореме:
Предположим, что $\exists\xi \in (a,b) :\ h_0(\xi) = 0$.

<-!-РИСУНОК-!->

$[h_0'(\xi) \neq 0$, иначе $h_0 \equiv 0$, что плохо в силу единственности решения$]$

Рассмотрим вариацию $\hat{h}(t) = h_0(t),\ t \in [a,\xi)$ и $\hat{h}(t) = 0,\ t \in [\xi,b]$
$\hat{h}(a) = \hat{h}(b) = 0$ по построению
$D(\hat{h}) = \int_a^\xi (p(h_0')^2 + qh_0^2)dt = 0$ по предыдущей лемме
$D(\hat{h} + \alpha h) = D(\hat{h}) + 2\alpha l(\hat{h},h) + \alpha^2 D(h)$
$//D(\hat{h}) = 0,\ h \in C_0^1[a,b],\ \alpha$ *— вещественный параметр*
Здесь $l(\hat{h},h) = \int_a^b (p\hat{h}'h' + q\hat{h}h)dt = \int_a^\xi (ph_0'h' + qh_0h)dt$
//последнее равенство следует из предыдущего рисунка
$\int_a^\xi ph_0'h'dt = \int_a^\xi dh = ph_0'h|_a^\xi - \int_a^\xi qh_0hdt$ $//(ph_0')' = qh_0$
Тогда $l(\hat{h},h) = p(\xi)h_0'h(\xi) =: \lambda < 0$ при некотором h $//p(\xi) > 0,\ h_0'(\xi) \neq 0$
// Мы хотим, чтобы $\lambda < 0$

<-!-РИСУНОК-!->

$D(\hat{h} + \alpha h) = \alpha[2\lambda + \alpha D(h)] < 0$ при малых $\alpha > 0$
С другой стороны, $D(\hat{h} + \alpha h) \geq 0$ по лемме о скруглении углов. Получаем противоречие.
$//$*т.е.* $h_0(t) > 0$ *на (a,b)*

Что и требовалось доказать.

3.7 Критерий положительной определенности интегральной квадратичной формы

$$D(h) = \int_a^b [p(h')^2 + gh^2]\, dt, \quad h \in C_0^1[a,b]$$

$$q \in C[a,b],\ p \in C^1[a,b],$$

усиленное условие Лежандра $p(t) > 0$ на $[a,b]$.
D называется положительно определенной формой,
если $D(h) > 0$ при $h \in C_0^1[a,b],\ h \not\equiv 0$.

Теорема 3.7.1 *D положительно определена $\iff$ усиленное условие Якоби: $h_0 > 0$ на $(a,b]$.*

Доказательство.
Необходимость:
Форма, по крайней мере, неотрицательно определена, из этого заключаем, что $h_0(t) > 0$ на (a,b).
Если $_0(b)$, то $h_0 \in C_0^1[a,b],\ D(h_0) = 0$,
что противоречит положительной определенности, ибо $h_0 \not\equiv 0$
Достаточность:
По крайней мере выполнено условие Якоби, из чего заключим,
что $D(h) \geq 0$.
Допустим, что $D(h_*) = 0$.
По замечанию к теореме Якоби $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{h_*(b)}_{=0} = \lambda \underbrace{h_0(b)}_{>0} \quad \Rightarrow\ \lambda = 0\ \Rightarrow\ h_*(t) \equiv 0$$

Что и требовалось доказать.

3.8 Оценка снизу для положительно определенной интегральной квадратичной формы

Теорема 3.8.1 *Пусть выполнено усиленное условие Якоби.
Тогда $\exists\ \mu > 0$:*

$$D(h) \geq \mu \int_a^b (h')^2\, dt \tag{3.8.1}$$

$\forall h \in C_0^1[a,b]$.

Доказательство.
$D_\mu(h)\ :=\ \int_a^b [(p(t) - \mu)(h')^2 + qh^2]\, dt$
$\mu_0 := \min\limits_{t\in[a,b]} p(t) > 0$ в силу усиленного условия Лежандра.
$\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$
Если D_μ положительно определена при некотором $\mu \in (0, \mu_0)$,
то неравенство (3.8.1) очевидно.

$$((p-\mu)h')' = qh$$

$$h'' + \frac{p'}{p-\mu}h' - \frac{q}{p-\mu}h = 0, \quad \mu \in (-\mu_0, \mu_0)$$

$h(a) = 0,\ h'(a) = 1$
$h(t,\mu)$ – решение этой задачи;
$h(t,0) = h_0(t)$

<-!-РИСУНОК-!->

Докажем, что $\exists \mu > 0 :\ h(t,\mu) > 0$ на $(a,b]$.
$h(t,\mu)$ и $h'(t,\mu)$ непрерывны на $[a,b] \times [-\mu_1, \mu_1],\ \mu_1 < \mu_0$
(Теорема о непрерывной зависимости из ДУ: линейное уравнение второго порядка, коэффициенты непрерывны)
$\frac{h_0(t)}{t-a}$ равна 1 при $t = a$: $\frac{h_0(t)-h_0(a)}{t-a} \underset{t\to a+0}{\longrightarrow} \underbrace{h'(a)}_{=1}$

<-!-РИСУНОК-!->

$\frac{h(t,\mu)}{t-a}$ равна 1 при $t = a$
Докажем, что $\quad \exists\mu > 0 \quad \frac{h(t,\mu)}{t-a} > 0$ на $[a,b]$.
От противного. $\quad \exists\ \mu_k \to +0,\ \exists\ t_k \in [a,b]$:

$$\frac{h(t_k,\mu_k)}{t_k - a} \leq 0 \tag{3.8.2}$$

$t_k \to t_*$ (или подпоследовательность). Покажем, что $t_* \neq 0$ (вообще говоря, $t_* \in [a,b]$).
Пусть $t_k \to a$, тогда $\frac{h(t_k,\mu_k)}{t_k-a} = \frac{h(t_k,\mu_k)-h(a,\mu_k)}{t_k-a} = h'(a + \vartheta_k(t_k - a), \mu_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$
(в этом переходе мы используем непрерывность по совокупности переменных)
$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} h'(a,0) = h_0'(a) = 1$, что противоречит (3.8.2).
$t_k \to t_*, \quad t_* \neq a, \quad t_* \in (a,b]$
Переходим к пределу в (3.8.2): $\frac{h(t_*,0)}{t_*-a} \leq 0\ \Rightarrow\ h(t_*,0) \leq a\ \Leftrightarrow\ h_0(t_*) \leq 0$, что противоречит усиленному условию Якоби (см. теорему 3.7.1).
Доказано $\exists\mu > 0\ \ \frac{h(t,\mu)}{t-a}$ на $[a,b]\ \Rightarrow\ h(t,\mu) > 0$ на $(a,b]\ \Rightarrow$ D_μ положительно определена $\Rightarrow$ (3.8.1)

Что и требовалось доказать.

Теорема 3.8.2 *x_* — решение квадратичной вариационной задачи, выполнены условия Якоби $\Longrightarrow Q(x_* + h) \geq Q(x_*) + \mu \int_a^b (h')^2 dt\ \forall h \in C_0^1[a,b]\ (\exists\ \mu > 0)$*

Доказательство.
I вариант:
$Q(x_* + h) = Q(x_*) + \underbrace{l(x_*, h)}_{=0} + D(h) \geq Q(x_*) + \mu \int_a^b (h')^2 dt$
x_* — единственное решение $Q(x_* + h) = Q(x_*) \Rightarrow D(h) = 0 \Rightarrow h = \mathbb{O}$
II вариант:
$\int_a^b (h')^2 dt = 0 \Rightarrow h' \equiv 0 \Rightarrow h = const$, а так как еще $h(a) = h(b) = 0 \Longrightarrow h \equiv 0$

Что и требовалось доказать.

subsection Описание всего множества решений квадратичной вариационной задачи

Замечание 3.8.1 *Пусть выполнено условие Якоби и*
$\exists h_* \in C_0^1[a,b]:\ D(h_*) = 0.$
Тогда $h_*(t) = \lambda h_0(t),\ t \in [a,b]$ *при некотором* λ.

Доказательство.
$D(h_*) = \int_a^b p(h'_* - \frac{h_*}{h_0} h'_0)dt;\ D(h_*) = 0$ по условию
Притом $p > 0$, подынтегральная функция непрерывна $\Rightarrow$
$\Rightarrow h'_*(t) - \frac{h_*(t)}{h_0(t)} h'_0(t) = 0$ на (a,b)
Преобразуем и перепишем:
$(*) = \frac{h'_*(t)h_0(t) - h'_*(t)h'_0(t)}{h_0^2(t)} = 0$ на (a,b)
$//h_0(t) > 0$ *на (a,b)* $\Rightarrow$ *можно написать в знаменателе* $h_0^2(t)$, *а не* $h_0(t)$,
//т.е. просто поделить еще на $h_0(t)$
$(*) = \frac{h_*(t)}{h_0(t)}' = 0$ на $(a,b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{h_*(t)}{h_0(t)} \equiv \lambda$ на $(a,b) \Rightarrow h_*(t) = \lambda h_0(t)$ на $(a,b) \Rightarrow$
по непрерывности и на $[a,b]$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3.8.1 *Пусть выполнено условие Якоби и* $h_0(b) = 0$;
если x_* *— некоторое решение квадратичной вариационной задачи, то все множество решений допускает представление*

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.8.1}$$

Доказательство.
Из условия Якоби и того, что $(h_0(b) = 0)$, следует $h_0 \in C_0^1[a,b],\ D(h_0) = 0$
(лемма в доказательстве необходимости теоремы Якоби; $\xi = b$).
Проверим, что x из (3.8.1) — решение:
$Q(x_* + \lambda h_0) = Q(x_*) + 2\lambda \underbrace{l(x_*, h_0)}_{=0} + \lambda^2 \underbrace{D(h_0)}_{=0} = Q(x_*) \Rightarrow x_* + \lambda h_0$ - решение.
Что это есть решение, мы установили, теперь установим, что все решения представимы в таком виде.
Итак, пусть x_1 - решение; тогда $h_1 = x_1 - x_* \in C_0^1[a,b]$
$Q(x_1) = Q(x_* + h_1) = Q(x_*) + D(h_1)\ Q(x_1) = Q(x_*) \Rightarrow D(h_1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (почему это — вспомните замечание 3.8.1) $h_1 = \lambda h_0 \Rightarrow x_1 = x_* + \lambda h_0$

Что и требовалось доказать.

3.9 Схема решения квадратичной вариационной задачи. Пример

$Q(x) := \int_a^b (p(x')^2 + qx^2 - 2fx)dt \to \inf$
$x(a) = A;\ x(b) = B;\ x \in C^1[a,b]$
$q \in C[a,b],\ p \in C^1[a,b]$
$p(t) > 0$ на $[a,b]$

1. $-(ph')' = qh$
   $h(a) = 0,\ h'(a) = 1$
   решение $h_0(t)$

2. если $\exists \xi \in (a,b):\ h_0(\xi) = 0$, то $\inf Q(x) = -\infty$
   при выполнении условия Якоби переходим к следующему пункту.

3. $-(ph')' + qx = f$
   $x(a) = A,\ x(b) = B$
   $x * (t)$ — решение

4. Если $h_0(b) > 0$, то x_* — единственное решение
   Если $h_0(b) = 0$, то $x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ — решение

Пример 3.9.1 $Q(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((x')^2 - x^2)dt \to \inf$
$x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1$
$p(t) \equiv 1,\ q(t) \equiv -1,\ f(t) \equiv 0$
$h'' = -h \iff hh'' + h = 0$
$h(0) = 0,\ h'(0) = 1$
$h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$
$h_0(t) = \sin t$
$h_0(t) > 0$ *на* $(0, \frac{\pi}{2}]$
$x'' + x = 0,\ x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1$
Задача Штурма-Лиувилля
$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$
$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$
$x(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$
$x_*(t) = \sin t$
$h_0(\pi 2) > 0 \Rightarrow x_*$ — *единственное решение*

Пример 3.9.2 $\frac{\pi}{2} \mapsto \pi$
$Q(x) := \int_0^\pi ((x')^2 - x^2)dt \to \inf$
$x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$
$h_0(t) = \sin t,\ h_0(t) > 0$ *на* $(0, \pi)$
$x'' + x = 0,\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$
$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$
$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$
$x(\pi) = 1 \Rightarrow c_2 \sin \pi = 1$
не имеет решения.

Пример 3.9.3 $Q(x) := \int_0^\pi ((x')^2 - x^2)dt \to \inf$
$x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$
$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$
$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$
$x(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin \pi = 0 \Rightarrow c_2 \in \mathbb{R}$
$x_*(t) \equiv 0\ (c_2 = 0),\ x(t) = c_2 \sin t$
$h_0(\pi) = 0 \Rightarrow x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t) = \lambda \sin t\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.10 Нелинейная вариационная задача. Конечномерная аппроксимация. Уравнение Эйлера

$J(x) := \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt \to \inf$
$x(a) = A,\ x(b) = B,\ x \in C^1[a, b]$
$F \in C^2(U),\ U \subset \mathbb{R}^3$ — открытое связное.
$x \in C[a, b]:\ z(x) = \Big\{(t, x(t), x'(t)):\ t \in [a, b]\Big\}$
$\Omega^0 = \Big\{x \in C''[a, b]:\ z(x) \subset U\Big\}$ — естественная область определения функционала J
$J(x) \approx \sum_{j=1}^{n+1} F(t_j, x(t_j), x'(t_j))h \to \inf$
$t_j = a + jh,\ j \in 0 : n + 1,\ h = \frac{b-a}{n+1}$
$x_j = x(t_j),\ x'(t_j) \approx \frac{x(t_j)-x(t_{j-1})}{h}$
$\Phi(x) := \sum_{j=1}^{n+1} F(t_j, x(t_j), \frac{x(t_j)-x(t_{j-1})}{h}) \to \inf$
$x_0 = A,\ x_{n+1} = B,\ x = (x_1, \dots, x_n)$
Необходимое условие оптимальности $\Phi'(x) = 0$, дифференцируем по x_j :
$\Phi'_{x_j}(x) = F'_x(t_j, x(t_j), \frac{x(t_j)-x(t_{j-1})}{h}) + F'_{x'}(t_j, x(t_j), \frac{x(t_j)-x(t_{j-1})}{h})\frac{1}{h} -$
$-F'_{x'}(t_{j+1}, x(t_{j+1}), \frac{x(t_{j+1})-x(t_j)}{h})\frac{1}{h},\quad j \in 1 : n$
$F'_x(t_j, x(t_j), x'(t_j)) - \frac{1}{h}(F'_{x'}(t_{j+1}, x(t_{j+1}), x'(t_{j+1})) - F'_{x'}(t_j, x(t_j), x'(t_j))) = 0$
$\varphi(t) := F'_{x'}(t_j, x(t_j), x'(t_j))$
$F'_x(t_j, x(t_j), x'(t_j)) - \frac{\varphi(t_j+h)-\varphi(t_j)}{h} = 0,\quad j \in 1 : n$
Фиксируем $t \in [a, b]$ и $\exists t_{j_n}:\ t_{j_n} \le t \le t_{j_{n+1}}$
Переходим к пределу при $n \to \infty$:
$F'_x(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}F'_{x'}(t, x(t), x'(t)) = 0,\quad t \in [a, b]$
$x(a) = A,\ x(b) = B$
Переходим к пределу в формуле для графика Φ'.
$J'(x) = -\frac{d}{dt}(F'_{x'}(t, x, x')) + F'_x(t, x, x')$ называется вариационной производной функционала J в точке x $(J'(x, t))$
$Q(x) := \int_a^b (p(x')^2 + qx^2 - 2fx)dt$
$F(t, x, x') = p(x')^2 + qx^2 - 2fx$
$F'_x = 2qx - 2f$
$f'_{x'} = 2px'$
Вариационная производная
$Q'(x) = -\frac{d}{dt}(2px') + (2qx - 2f) = 2(-p(x')' + qx - f) = 2(\mathbb{L}(x) - f)$
Уравнение Эйлера: $J'(x, t) = 0,\ t \in [a, b]$
$Q:\ \mathbb{L}(x) - f = 0$
Для Q уравнение Эйлера = уравнение Штурма-Лиувилля.

3.11 Естественная область определения интегрального функционала. Ее открытость в пространстве непрерывно дифференцируемых функций

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, x')dt, \quad x \in C^1[a, b]$$

$F \in C^2(U),\quad U \subset \mathbb{R}^3$ открытое связное.
$\Omega^0 = \{x \in C^1[a, b] \mid Z(x) \subset U\}$ — естественная область определения функционала J.
$Z(x) = \{(t, x(t), x'(t)) \mid t \in [a, b]\}$
$x \in C^1[a, b] \qquad \|x\|_1 = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$

Теорема 3.11.1 Ω^0 *открыто в* $C^1[a, b]$.

Доказательство.
$\forall\ x_0 \in \Omega^0\quad \exists\ \delta_0 > 0:\quad x_0 + h \in \Omega^0$ при $\|h\|_1 \le \delta_0$
$Z_0 = Z(x_0),\quad \delta > 0$ фиксировано.
$Z_\delta = \{(\tau, u, v) \mid \exists t \in [a, b]\quad |\tau - t| + |u - x_0(t)| + |v - x'_0(t)| \le \delta\}$

Лемма 3.11.1 Z_δ *ограничено и замкнуто (компактно).*

Доказательство.
$|\tau| \le |t|+\delta\quad |u| \le |x_0(t)|+\delta\quad |v| \le |x'_0(t)|+\delta$ при некотором $t \in [a, b]$,
$x_0(t), x'_0(t)$ ограничены на $[a, b] \Rightarrow$ ограниченность Z_δ.
$(\tau_k, u_k, v_k) \to (\tau_*, u_*, v_*)$
$\forall\ k\quad \exists\ t_k \in [a, b]:\quad |\tau_k - t_k| + |u_k - x_0(t_k)| + |v_k - x'_0(t_k)| \le \delta$
$t_k \to t_* \in [a, b]$ в пределе $|\tau_* - t_*| + |u_* - x_0(t_*)| + |v_* - x'_0(t_*)| \le \delta \Rightarrow (\tau_*, u_*, v_*) \in Z_\delta$

Что и требовалось доказать.

Лемма 3.11.2 $\exists\ \delta_0 > 0\quad Z_{\delta_0} \subset U$.

Доказательство.
От противного.
$\forall\ \delta_k > 0\ \exists\ t_k \in [a, b] : (\tau_k, u_k, v_k) \in Z_{\delta_k}$ с соотв. $t_k \quad (\tau_k, u_k, v_k) \notin U\ \ \delta_k \to 0+ \quad |\tau_k - t_k| + |u_k - x_0(t_k)| + |v_k - x'_0(t_k)| \le \delta_k$
(t_k, τ_k, u_k, v_k) ограничена
Считаем, что $(t_k, \tau_k, u_k, v_k) \to (t_*, \tau_*, u_*, v_*)$
Переходим в неравенстве к пределу
$|\tau_* - t_*| + |u_* - x_0(t_*)| + |v_* - x'_0(t_*)| = 0 \Rightarrow$
$(\tau_*, u_*, v_*) = (t_*, x_0(t_*), x'_0(t_*)\ ) \in Z_0 \subset U$.
Но U открыто $\Rightarrow$ (τ_*, u_*, v_*) содержится в U вместе с окрестностью, однако $(t_k, u_k, v_k) \to (\tau_*, u_*, v_*)\quad (t_k, u_k, v_k) \notin U$ по предположению.
Противоречие.

Что и требовалось доказать.

$x_0 + h \in \Omega^0$ при $\|h\|_1 \le \delta_0\quad$ (δ_0 из Леммы 2).
Докажем, что $Z(x_0 + h) \subset U$.
Покажем,что $Z(x_0 + h) \subset Z_{\delta_0} (\subset U)$.
Рассмотрим элемент из $Z(x_0 + h)$: $\quad (t, x_0(t) + h(t), x'_0(t) + h'(t)\ )$
Рассмотрим $(t, x_0(t), x'_0(t)\ ) \in Z_0$
Расстояние l_1 между ними: $\delta_0 \ge l_1 \ge |h(t)| + |h'(t)| \qquad \|h_1\| \le \delta_0$
По определению $(t, x_0(t) + h(t), x'_0(t) + h'(t)\ ) \in Z_{\delta_0}$

Что и требовалось доказать.

3.12 Первый дифференциал интегрального функционала

$$J(x) = \int\limits_a^b F(t, x(t), x'(t)\ )dt$$

Ω^0 — естественная область определения, $x_0 \in \Omega^0$.
Как известно, $\exists\ \delta_0 > 0 \quad x_0 + h \in \Omega^0$ при $\|h\|_1 \le \delta_0$
Покажем, что
$$J(x_0 + h) - J(x_0) = l(h) + o(\|h\|_1),$$
где l — линейный функционал на $C^1[a, b]$.

$$J(x_0 + h) - J(x) = \int\limits_a^b H(t)dt$$

$$H(t) = \tilde F'_x h + \tilde F'_{x'} h' = (F'_x h + F'_{x'} h') + [(\tilde F'_x - F'_x)h + (\tilde F'_{x'} - F'_{x'})h] = H_1(t) + G_1(t)$$

Аргументы у $\tilde F'_x, \tilde F'_{x'} \quad (t, x_0 + \vartheta h, x'_0 + \vartheta h')$.

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = \int\limits_a^b H_1(t)dt + \int\limits_a^b G_1(t)dt = l(h) + \omega_1(h)$$

$$l(h) = \int\limits_a^b (F'_x h + F'_{x'} h')dt$$

Это линейный функционал на $C^1[a, b] \quad (\ l(\alpha h) = \alpha l(h)\ )$

Покажем, что $\omega_1(h) = o(\|h\|_1)$
Z_{δ_0} ограничен и замкнут, поэтому по теореме Кантора $F'_x, F'_{x'}$ равномернонепрерывны на Z_{δ_0}
$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta \in (0, \frac{\delta_0}{2}]$:

$$|F'_x(t, x_0(t) + u, x'_0(t) + v - F'_x(t, x_0(t), x'_0(t))\ )| \le \frac{\varepsilon}{b - a}$$

$$|F'_{x'}(t, x_0(t) + u, x'_0(t) + v - F'_{x'}(t, x_0(t), x'_0(t))\ )| \le \frac{\varepsilon}{b - a}$$

$|u|, |v| < \delta$ при всех $t \in [a, b]$ ($|u| + |v| \le \delta_0$ и приращение на выходит за Z_{δ_0}).

$$|\omega_1(h)| \le \int\limits_a^b |G_1(t)|dt \le \frac{\varepsilon}{b - a}\int\limits_a^b (|h| + |h'|)dt \le \varepsilon\|h\|_1,$$

т.е. $\omega_1(h) = o(\|h\|_1)$.

$l(h)$ называется первым дифференциалом функционала J в точке x_0, обозначается $dJ(x_0; h)$, т.е. доказано существование представления.
Покажем единственность:

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = l(h) + o(\|h\|_1)$$

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = l_1(h) + o(\|h\|_1)$$

Тогда $l(h) - l_1(h) = o(\|h\|_1)$
$x_0 + \lambda h \in Z_{\delta_0}$ при малых $\lambda > 0$.

$$l(\lambda h) - l_1(\lambda h) = o(\|\lambda h\|_1)$$

$$l(h) - l_1(h) = \frac{o(\|\lambda h\|_1)}{\lambda\|h\|_1}, \quad \lambda > 0$$

$$\lambda \to 0+ \qquad l(h) = l_1(h) \qquad \forall\ h \in C^1[a, b]$$

Теорема 3.12.1 *J дифференцируем в каждой точке $x_0 \in \Omega^0$, при этом*

$$dJ(x_0; h) = \int\limits_a^b (\ F'_x h + F'_{x'}\ )dt$$

$$J(x_0 + h) = J(x_0) + dJ(x_0; h) + o(\|h\|_1)$$

3.13 Второй дифференциал интегрального функционала

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = dJ(x_0; h) + \frac{1}{2}D(h) + o(\|h\|_1^2),$$

где $D(x)$ — квадратичная форма в $C^1[a, b]$.
$D(h) = d^2J(x_0; h)$ второй дифференциал.
Фиксируем $t \in [a, b]$

$$H(t) = (\ F'_x h + F'_{x'} h'\ ) + \frac{1}{2}(\ \tilde F''_{xx} h^2 + 2\tilde F''_{xx'} hh' + \tilde F''_{x'x'}(h')^2\ ) =$$

$$(\ F'_x h + F'_{x'} h'\ ) + \frac{1}{2}(\ F''_{xx} h^2 + 2F''_{xx'} hh' + F''_{x'x'}(h')^2\ ) +$$

$$+\frac{1}{2}[\ (\ \tilde F''_{xx} - F''_{xx}\ )h^2 + 2(\ \tilde F''_{xx'} - F''_{xx'}\ )hh' + (\ \tilde F''_{x'x'} - F''_{x'x'}\ )(h')^2\ ] =$$

$$= H_1(t) + H_2(t) + G_2(t)$$

$$D(h) = \int\limits_a^b [\ F''_{xx} h^2 + 2F''_{xx'} hh' + F''_{x'x'}(h')^2\ ]dt$$

D квадратичная форма на $C^1[a, b] \qquad (\ D(\lambda h) = \lambda^2 D(h)\ )$.

$$|\omega_2(x)| = \int\limits_a^b |G_2(t)|dt \le \frac{\varepsilon}{b - a}\int\limits_a^b (\ |h|^2 + 2|h|\cdot|h'| + |h'|^2\ )dt \le \varepsilon(\ \|h\|_1^2\ )$$

(ε и δ как в случае первого дифференциала).

$$\omega_2(h) = o(\|h\|_1^2)$$

$J(x), x_0 \in \Omega^0$

$$dJ(x_0, h) = \int_a^b [F'_x h + F'_{x'} h']dt, \quad h \in C^1[a, b]$$

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = dJ(x_0, h) + o(\|h\|_1)$$

$$J(x_0 + h) = J(x_0) + dJ(x_0, h) + \frac{1}{2}D(h) + o(\|h\|_1^2), \quad \|h\|_1 \le \delta_0$$

Единственность D:
Пусть имеется еще одна квадр. форма D_1: $D(h) - D_1(h) = o(\|h\|_1^2)$.
Фиксируем $h_0 \in C^1[a, b] : h_0 \not\equiv 0$

$$D(\lambda h_0) - D_1(\lambda h_0) = o(\|\lambda h_0\|_1^2)$$

$$\Rightarrow D(h_0) - D_1(h_0) = \underbrace{\frac{o(\|\lambda h_0\|_1^2)}{\lambda^2\|h_0\|_1^2}}_{\to 0\ (\lambda \to 0+)} \|h_0\|_1^2, \quad \lambda \ge 0$$

$$\Rightarrow D(h_0) = D_1(h_0) \quad \forall h_0 \in C^1[a, b]$$

$$d^2J(x_0, h) = \int_a^b [F''_{xx} h^2 + 2F''_{xx'} hh' + F''_{x'x'}(h')^2]dt$$

Теорема 3.13.1 *$J(x)$ в каждой точке $x_0 \in \Omega^0$ дважды дифференцируемо, при этом для второго дифференциала верна формула, приведенная выше.*

3.14 Необходимые условия локального минимума первого порядка в нелинейной вариационной задаче

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, x')dt \to \inf$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a, b],$$

$$F \in C^2(U), \quad \Omega^0 \subset C^1[a, b] \text{ — открыто в } C^1[a, b]$$

Ω — множество планов. $x_* \in \Omega$ — точка локального минимума.

$$J(x_* + h) \geq J(x_*) \quad \forall h \in C_0^1[a, b], \quad \|h\|_1 \leq \rho$$

Теорема 3.14.1 *$x_* \in \Omega$ — точка локального минимума. Тогда*

$$dJ(x_*, h) = 0 \qquad (3.14.1)$$

$$d^2J(x_*, h) \geq 0 \qquad (3.14.2)$$

при всех $h \in C_0^1[a, b]$
(3.14.1) — необходимое условие минимума I порядка.
(3.14.2) — необходимое условие минимума II порядка.

Доказательство.
Фиксируем $h_0 \in C_0^1[a, b]$, $h_0 \not\equiv 0$ (иначе (3.14.1) и (3.14.2) тривиальны.)

$$0 \leq J(x_* + \lambda h_0) - J(x_*) = dJ(x_*, \lambda h_0) + o(\|\lambda h_0\|_1)$$

$$\Rightarrow dJ(x_*, h_0) + \underbrace{\frac{o(\|\lambda h_0\|_1)}{\lambda\|h_0\|_1}}_{\to 0 (\lambda \to 0)} \|h_0\|_1 \geq 0$$

$$\Rightarrow dJ(x_*, h_0) \geq 0$$

$$-h_0 \in C_0^1[a, b]$$

$$dJ(x_*, -h_0) \geq 0 \Rightarrow dJ(x_*, h_0) \leq 0$$

Получили $dJ(x_*, h_0) = 0$

$$0 \leq J(x_* + \lambda h_0) - J(x_*) = \frac{1}{2}d^2J(x_*, \lambda h_0) + o(\|\lambda h_0\|_1^2) \quad (\lambda > 0, \text{ мала.})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}d^2J(x_*, \lambda h_0) + \underbrace{\frac{o(\|\lambda h_0\|_1^2)}{\lambda^2\|h_0\|_1^2}}_{\to 0 (\lambda \to 0+)} \|h_0\|_1^2 \geq 0$$

$$d^2J(x_*, h_0) \geq 0$$

Что и требовалось доказать.

$$dJ(x_*, h) = \int_a^b [F'_x h + F'_{x'} h']dt, \quad h \in C_0^1[a, b]$$

Лемма 3.14.1

$$dJ(x_*, h) = 0, \quad \forall h \in C_0^1[a, b] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F'_{x'}(t, x_*(t), x'_*(t)) \in C^1[a, b]$$
$$\text{и } \frac{d}{dt}F'_{x'} = F'_x \text{ на } [a, b]$$

Доказательство.
Необходимость следует из основной леммы вариационного исчисления 3.1.2:

$$u = F'_{x'}, \quad v = F'_x \qquad [u \in C^1[a, b], u' = v]$$

Достаточность:

$$\int_a^b F'_{x'} h' dt = \int_a^b F'_{x'} dh = \underbrace{F'_{x'} h|_a^b}_{=0 \text{ (доп. вар.)}} - \int_a^b \frac{d}{dt}F'_{x'} h dt$$

$$dJ(x_*, h) = \int_a^b \underbrace{(F'_x - \frac{d}{dt}F'_{x'})}_{=0} h dt = 0$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3.14.2 *$x_* \in \Omega$ — точка локального минимума вариационной задачи, тогда $F'_{x'}(t, x_*, x'_*) \in C^1[a, b]$ и x_* удовлетворяет*

$$F'_x(t, x, x') - \frac{d}{dt}F'_{x'}(t, x, x') = 0$$

на $[a, b]$.
$x(a) = A, \quad x(b) = B$

Доказательство.
Очевидно из леммы 3.14.1.

Что и требовалось доказать.

Любая интегральная кривая наз. *экстремалью*. Экстремаль, удовлетворяющая краевым условиям, наз. стационарной кривой.

3.15 Теорема о существовании и непрерывности второй производной у экстремали нелинейной вариационной задачи

Теорема 3.15.1 [Гильберта]
Пусть x_0 — экстремаль.

$$T = \left\{ t \in [a, b] | F''_{x'x'}(t, x_0, x'_0) \neq 0 \right\}$$

$$\Rightarrow x_0 \in C^2(T)$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} F'_{x'} = F'_x \text{ на } x_0$$

Фиксируем $t_0 \in T$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[F'_{x'}(t_0 + \Delta t, x_0(t_0 + \Delta t), x'_0(t_0 + \Delta t)) - F'_{x'}(t_0, x_0(t_0), x'_0(t_0)) \right] \to$$

$$\to F'_x(t_0, x_0(t_0), x'_0(t_0))$$

$$\tilde{F}''_{x't} + \tilde{F}''_{x'x} \frac{x_0(t_0 + \Delta t) - x_0(t_0)}{\Delta t} + \tilde{F}''_{x'x'} \frac{x'_0(t_0 + \Delta t) - x'_0(t_0)}{\Delta t}$$

Аргумент $\tilde{F}$: $(t_0 + \vartheta \Delta t, x_0(t_0) + \vartheta(x_0(t_0 + \Delta t) - x_0(t_0)), x'_0(t_0) + \vartheta(x'_0(t_0 + \Delta t) - x'_0(t_0)))$

$$\frac{x'_0(t_0 + \Delta t) - x'_0(t_0)}{\Delta t} = \frac{1}{\tilde{F}''_{x'x'}} \left[\tilde{F}''_{x'x} \frac{x'_0(t_0 + \Delta t) - x'_0(t_0)}{\Delta t} + \tilde{F}''_{x'x} \frac{x_0(t_0 + \Delta t) - x_0(t_0)}{\Delta t} + \tilde{F}''_{x't} \right]$$

$\Delta t \to 0$

$$x''_0(t_0) = \tilde{F}''_{x'x'} \left[F'_x - F''_{x'x} x'_0(t_0) - F''_{x't} \right]$$

(t, x_0, x'_0)
Правая часть непрерывна на $T \Rightarrow x_0 \in C^2(T)$

Что и требовалось доказать.

Следствие 3.15.1 *Если x_0 — экстремаль, и на ней $F''_{x'x'} \neq 0$ при $t \in [a, b]$, то $x_0 \in C^2[a, b]$*

$$x \in C^2[a, b]$$

$$\frac{d}{dt}\left(F - x' F'_{x'} \right) = F'_t + F'_x x' + F'_{x'} x'' - x'' F'_{x'} - x' \frac{d}{dt} F'_{x'} =$$

$$= F'_t + x' \left(F'_x - \frac{d}{dt} F'_{x'} \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(F - x' F'_{x'} \right) \equiv F'_t$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B$$

Допустим, что оно имеет решение $x_0 \in C^2[a, b], x'_0(t) \neq 0$, за исключением конечного числа точек.
Тогда x_0 — стационарная кривая

$$\left(x' \left(F'_x - \frac{d}{dt} F'_{x'} \right) = 0 \right)$$

Следствие 3.15.2 *Если $F = F(x, x')$, то следует решать краевую задачу*

$$F - x' F'_{x'} \equiv const$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B$$

Если решение существует, $\in C^2[a, b]$ и его производная обращается в 0 разве лишь в конечном числе точек, то это решение — стационарная кривая.

3.16 Необходимые условия локального минимума второго порядка в нелинейной вариационной задаче

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, x') dt \to \inf$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a, b],$$

$$F \in C^2(U), \quad \Omega^0 \subset C^1[a, b] \text{ — открыто в } C^1[a, b]$$

Ω — множество планов. $x_* \in \Omega$ — точка локального минимума.

$$J(x_* + h) \geq J(x_*) \quad \forall h \in C^1_0[a, b], \quad \|h\|_1 \leq \rho$$

Теорема 3.16.1 *$x_* \in \Omega$ — точка локального минимума. Тогда*

$$dJ(x_*, h) = 0 \tag{3.16.1}$$

$$d^2 J(x_*, h) \geq 0 \tag{3.16.2}$$

при всех $h \in C^1_0[a, b]$
(3.14.1) — необходимое условие минимума I порядка.
(3.14.2) — необходимое условие минимума II порядка.

Доказательство.
Фиксируем $h_0 \in C^1_0[a, b], h_0 \not\equiv 0$ (иначе (3.14.1) и (3.14.2) тривиальны.)

$$0 \leq J(x_* + \lambda h_0) - J(x_*) = dJ(x_*, \lambda h_0) + o(\|\lambda h_0\|_1)$$

$$\Rightarrow dJ(x_*, h_0) + \underbrace{\frac{o(\|\lambda h_0\|_1)}{\lambda \|h_0\|_1}}_{\to 0 (\lambda \to 0)} \|h_0\|_1 \geq 0$$

$$\Rightarrow dJ(x_*, h_0) \geq 0$$

$$-h_0 \in C^1_0[a, b]$$

$$dJ(x_*, -h_0) \geq 0 \Rightarrow dJ(x_*, h_0) \leq 0$$

Получили $dJ(x_*, h_0) = 0$

$$0 \leq J(x_* + \lambda h_0) - J(x_*) = \frac{1}{2} d^2 J(x_*, \lambda h_0) + o(\|\lambda h_0\|_1^2) \quad (\lambda > 0, \text{ мала.})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} d^2 J(x_*, \lambda h_0) + \underbrace{\frac{o(\|\lambda h_0\|_1^2)}{\lambda^2 \|h_0\|_1^2}}_{\to 0 (\lambda \to 0+)} \|h_0\|_1^2 \geq 0$$

$$d^2 J(x_*, h_0) \geq 0$$

Что и требовалось доказать.

$$dJ(x_*, h) = \int_a^b [F'_x h + F'_{x'} h'] dt, \quad h \in C^1_0[a, b]$$

Лемма 3.16.1

$$dJ(x_*, h) = 0, \quad \forall h \in C^1_0[a, b] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F'_{x'}(t, x_*(t), x'_*(t)) \in C^1[a, b]$$

$$\text{и } \frac{d}{dt} F'_{x'} = F'_x \text{ на } [a, b]$$

Доказательство.
Необходимость следует из основной леммы вариационного исчисления 3.1.2:

$$u = F'_{x'}, \quad v = F'_x \qquad [u \in C^1[a,b], u' = v]$$

Достаточность:

$$\int_a^b F'_{x'} h' dt = \int_a^b F'_{x'} dh = \underbrace{F'_{x'} h|_a^b}_{=0 \text{ (доп. вар.)}} - \int_a^b \frac{d}{dt} F'_{x'} h dt$$

$$dJ(x_*, h) = \int_a^b \underbrace{(F'_x - \frac{d}{dt} F'_{x'})}_{=0} h dt = 0$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3.16.2 *$x_* \in \Omega$ — точка локального минимума вариационной задачи, тогда $F'_{x'}(t, x_*, x'_*) \in C^1[a,b]$ и x_* удовлетворяет*

$$F'_x(t, x, x') - \frac{d}{dt} F'_{x'}(t, x, x') = 0$$

на $[a,b]$.
$x(a) = A, \quad x(b) = B$

Доказательство.
Очевидно из леммы 3.14.1.

Что и требовалось доказать.

Любая интегральная кривая наз. *экстремалью.* Экстремаль, удовлетворяющая краевым условиям, наз. стационарной кривой.

3.17 Достаточные условия строгого локального минимума в нелинейной вариационной задаче

$$J(x) := \int_a^b F(t, x, x') dt \to \inf \tag{3.17.1}$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a,b]$$

$$F \in C^3(U)$$

Теорема 3.17.1 *Пусть*

1 x_0 — стационарная кривая (удовлетворяет уравнению Эйлера и краевым условиям).

2 На ней выполнено усиленное условие Лежандра $p(t) > 0$ на $[a,b]$ $\quad (p(t) = F''_{x'x'}(t, x_0(t), x'_0(t)))$.

3 На ней выполнено усиленное условие Якоби $h_0(t) > 0$ на $(a,b]$

$$\left[\quad (ph')' = qh, \quad h(a) = 0, \quad h'(a) = 1, \quad g = v - u', \quad v = F''_{xx}, u = F''_{xx'}\right]$$

$\Longrightarrow$ *x_0 — точка строгого локального минимума (для (3.17.1))*

$$J(x_0 + h) > J(x_0) \; \forall h \in C_0^1[a,b], \quad h \not\equiv 0, \|h\|_1 \le \rho$$

Доказательство.

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = \underbrace{dJ(x_0, h)}_{=0 \text{ по условию } 1} + \frac{1}{2} d^2 J(x_0, h) + \omega_2(h) =$$

$$= \frac{1}{2} d^2 y(x_0, h) + \omega_2(h) \ge \frac{1}{2} d^2 y(x_0, h) - |\omega_2(h)|$$

$d^2 J(x_0, h) = D(h) = (D(h)$ положительно определена по усл. 2,3)

$$= \int_a^b (p(h')^2 + gh^2) dt \ge \mu \int_a^b (h')^2 \, dt \quad \forall h \in C_0^1[a,b] \quad (\exists \mu > 0)$$

Напомним, что $|\omega_2(h)| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b ((h')^2 + 2|hh' + h^2) \, dt$ при $\|h\|_1 \le \delta$

$$h \in C_0^1[a,b]$$

$$h^2(t) = \left(\int_a^t 1 \cdot h'(\tau) \, d\tau\right)^2 \le \int_a^t 1^2 \, dt \int_a^t (h')^2 \, dt \le (b-a) \int_a^b (h')^2 \, dt$$

$\int_a^b h^2 dt \le (b-a)^2 \int_a^b (h')^2 dt$

$$\int_a^b |hh'| dt \le \left(\int_a^b h^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (h')^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \le (b-a) \int_a^b (h')^2 dt$$

$$\int_a^b ((h')^2 + 2|hh' + h^2) \, dt \le (1 + 2(b-a) + (b-a)^2) \int_a^b (h')^2 \, dt$$

$|\omega_2(h)| \le \frac{\varepsilon(b-a+1)^2}{b-a} \int_a^b (h')^2 \, dt$ при $\|h_1\| \le \delta$
Возьмем $\varepsilon = \frac{\mu}{4} \frac{b-a}{(b-a+1)^2}$

$$|\omega_2(h)| \le \frac{\mu}{4} \int_a^b (h')^2 dt$$

$$J(x_0 + h) - J(x_0) \ge \frac{\mu}{2} \int_a^b (h')^2 \, dt - \frac{\mu}{4} \int_a^b (h')^2 \, dt =$$

$= \frac{\mu}{4} \int_a^b (h')^2 \, dt$ при $\|h\|_1 \le \delta$

Что и требовалось доказать.

3.18 Параметрический метод построения главного решения уравнения Якоби. Пример

x_0 — стационарная кривая
$\alpha_0 = x_0'(a)$

$$F_x'(t, x(t,\alpha), x_t'(t,\alpha)) - \frac{d}{dt}(F_x'(t, x(t,\alpha), x_t'(t,\alpha)) = 0 \text{ на } [a,b]$$

$$x(a,\alpha) = A \quad , \quad x_t'(a,\alpha) = \alpha_0 \tag{3.18.1}$$

$x(t,\alpha)$ — параметрическое поле экстремалей
$x(t,\alpha_0) = x_0(t)$
(Стационарную кривую погрузим в поле экстремалей)

Пусть $x(t,\alpha)$ трижды дифференцируема на $[a,b] \times (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 \varepsilon)$
Дифференцируем (3.18.1) по α

$$x_\alpha'(a,\alpha) = 0, \quad x_{\alpha t}''(a,\alpha) = 1 \tag{3.18.2}$$

Дифференцируем уравнение Эйлера по α и подставляем $\alpha = \alpha_0$

$$F_{xx}''x_\alpha'(t,\alpha_0) + F_{xx}''x_{t\alpha}''(t,\alpha_0) - \frac{d}{dt}[F'' x'xx_\alpha'(t,\alpha_0) + F'' x'x'x_\alpha''(t,\alpha_0)] = 0$$

Аргумент у F' — (t, x_0, x_0') $[x(t,\alpha_0) = x_0(t)]$

$$vx_\alpha' + \underline{ux_{t\alpha}''} - \underline{ux_{t\alpha}''} - u'x_\alpha' - \frac{d}{dt}(px_{t\alpha}'') = 0$$

$$\frac{d}{dt}(px_{t\alpha}'') = (v - u')x_\alpha'$$

$h_0(t) = x_\alpha'(t,\alpha_0)$ удовлетворяет уравнению Якоби
$h_0(a) = x_\alpha'(a,\alpha_0) = 0$ по (3.18.2)
$h_0'(a) = x_{\alpha t}''(a,\alpha_0) = 1$ по (3.18.2)
$h_0(t)$ — главное решение уравнения Якоби

x_* — стационарная кривая, выполнено усиленное условие Лежандра.

$$F_x' - \frac{d}{dt}F_{x'}' = 0 \qquad x(a) = A \quad x'(a) = B$$

$$x(t,\alpha), \qquad \alpha_0 = x_*'(a), \quad x(t,\alpha_0) = x_*(t)$$

$h_0(t) = x_\alpha'(t,\alpha_0)$ — главное решение уравнения Якоби.
Если $h_0(t) > 0$ на $[a,b]$, то x_* — точка строгого локального минимума.

Пример 3.18.1

$$J(x) := \int_0^1 \frac{x}{x'^2}\,dt \to \inf \qquad x(0) = 1, \quad x(1) = 4, \quad x \in C^1[0,1]$$

$y := x'$ $\quad F = F(x,y) = \frac{x}{y^2} \qquad U : y > 0, x > 0$
$F_y' = \frac{-2x}{y^3} \qquad F_{yy}'' = \frac{6x}{y^4} > 0$ на U
Функционал J — положительный регулярный (на всей кривой выполняется условие Лежандра).

Уравнение Эйлера: $F - x'F' - x' \equiv const$

$$\frac{x}{(x')^2} - x'\frac{-2x}{(x')^3} \equiv const$$

$$\frac{3x}{(x')^2} = \frac{3}{4a^2}, \quad a > 0$$

$$x' = 2a\sqrt{x}$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = a \cdot dt$$

$$\sqrt{x} = at + b \qquad x = (at+b)^2$$

$x(0) = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$ или $b = -1$
$x(1) = 4 \Rightarrow (a+b)^2 = 4 \Rightarrow a = 1$ или $a = 3 \quad a > 0$

$x_*(t) = (t+1)^2$ — стационарная кривая.
$x_0(t) = (3t-1)^2$ — побочная кривая. $x_0(\frac{1}{3}) = 0$

Усиленное условие Лежандра на x_* выполняется.
$x = (at+b)^2$ — общее решение уравнения Эйлера.

$$x(0) = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \qquad x'(0) = \alpha \Rightarrow 2ab = \alpha \Rightarrow a = \frac{\alpha}{2b}$$

$$x(t,\alpha) = (\frac{\alpha}{2b}t + b)^2 = b^2(\frac{\alpha}{2b} + 1)^2 = (\frac{\alpha}{2}t + 1)^2$$

$$\alpha_0 = 2 \qquad h_0(t) = x_\alpha'(t,\alpha_0) = 2\frac{t}{2}(\frac{\alpha}{2}t + 1)|_{\alpha=2} = t(t+1)$$

$h_0(t) > 0$ на $(0,1]$ — усиленное условие Якоби выполнено $\Rightarrow x_*$ — точка строгого локального минимума.

$$J(x_*) = \int_0^1 \frac{(t+1)^2}{4(t+1)^2}\,dt = \frac{1}{4} \qquad J(x_0) = \int_0^1 \frac{(3t-1)^2}{36(3t-1)^2}\,dt = \frac{1}{36}$$

3.19 Формализация задачи о брахистохроне

Найти кривую, по которой тяжелая материальная точка скатывалась бы за кратчайшее время.

$$P(x) = mg \cdot \sin\varphi = \frac{mg \cdot \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{mg \cdot y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} \qquad \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Пусть V_0 — начальная скорость, dS — элемент дуги.

$$P = m\frac{dV}{dt} = m\frac{dV}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = mV\frac{dV}{dS}$$

$$\frac{gy'dS}{\sqrt{1-(y')^2}} = V \cdot dV \Rightarrow 2gy'dx = dV^2 \Rightarrow 2gdy = dV^2$$

Интегрируем по $[0, x]$ $(y(0) = 0, \quad 2g\beta := V_0^2, \quad \beta = \frac{V_0^2}{2g})$:

$$2g \cdot y(x) = V^2(x) - V^2(0) \Rightarrow 2g(y+\beta) = V^2 \Rightarrow V = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{y+\beta}$$

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{y+\beta} \Rightarrow dt = \frac{dS}{\sqrt{2g} \cdot \sqrt{y+\beta}} = \frac{\sqrt{1+(y')^2} \cdot dx}{\sqrt{2g} \cdot \sqrt{y+\beta}}$$

Интегрируем по $[0, b]$ $(t(0) = 0)$:

$$t(b) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y+\beta} dx \qquad T(y) = t(b)$$

$$T(y) := \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y+\beta} dx \to \inf \tag{3.19.1}$$

$$y(0) = 0, \quad y(b) = B, \quad x \in C^1[0, b]$$

T положительно регулярна.

3.20 Решение задачи о брахистохроне

$$T(y) := \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y+\beta} dx \to \inf \tag{3.20.1}$$

$$y(0) = 0, \quad y(b) = B, \quad x \in C^1[0, b]$$

T положительно регулярна.

$z := y' \quad U : y > -\beta$

$$F = F(y, z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{y+\beta}$$

$$F'_z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2} \cdot \sqrt{y+\beta}} \qquad F''_{zz} = \frac{\sqrt{1+z^2} - z\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{(1+z^2) \cdot \sqrt{y+\beta}} = \frac{1}{\sqrt{y+\beta} \cdot (1+z^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Уравнение Эйлера (с понижением порядка)

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y+\beta}} - y'\frac{y'}{\sqrt{y+\beta} \cdot \sqrt{1+(y')^2}} \equiv const$$

$$\frac{1}{\sqrt{y+\beta} \cdot \sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}, \quad r > 0 \qquad y+\beta = \frac{2r}{1+(y')^2} \tag{3.20.2}$$

Пусть $y'(x) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\vartheta(x) \quad \vartheta \in (0, 2\pi) \quad \vartheta \in C^1(0, 2\pi)$.

(3.20.2) $\Rightarrow y+\beta = 2r \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2} = r(1-\cos\vartheta)$
Дифференцируем по x:

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = r \cdot \sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dx} \Rightarrow dx2r \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2}d\vartheta = r(1-\cos\vartheta)d\vartheta \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+\alpha = r(\vartheta - \sin\vartheta) \\ y+\beta = r(1-\cos\vartheta) \end{cases} \qquad \vartheta \in (0, 2\pi) \tag{3.20.3}$$

ϑ — независимый параметр.

Проверим (3.20.2):

$$\frac{dx}{d\vartheta} = r(1-\cos\vartheta) = 2r \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2} \qquad \frac{dy}{d\vartheta} = 2r \cdot \sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \cos\frac{\vartheta}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}$$

$$\frac{2r}{1+(y')^2} = \frac{2r}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}} = 2r \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2} = r(1-\cos\vartheta) = y+\beta$$

Параметры (3.20.3): α и r.
Решением задачи (3.20.1) является дуга кривой (3.20.3) $[\vartheta_0, \vartheta_1] \subset (0, 2\pi)$

$$y(0) = 0 : \begin{cases} \alpha = r(\vartheta_0 - \sin\vartheta_0) \\ \beta = r(1-\cos\vartheta_0) \end{cases} \qquad y(b) = B : \begin{cases} b+\alpha = r(\vartheta_1 - \sin\vartheta) \\ B+\beta = r(1-\cos\vartheta_1) \end{cases}$$

Неизвестные: $r, \alpha, \vartheta_0, \vartheta_1$, система нелинейна.

Базовая кривая определяется условиями:

$$\begin{cases} x+\alpha = r(\vartheta - \sin\vartheta) \\ y+\beta = r(1-\cos\vartheta) \end{cases} \qquad \vartheta \in (0, 2\pi)$$

$$x = r(\vartheta - \sin\vartheta)$$

$$y = r(1-\cos\vartheta)$$

<-!-РИСУНОК-!->

$$|OP| = |\check{M}P| = r\vartheta$$

$$x = r\vartheta - r\sin\vartheta = r(\vartheta - \sin\vartheta)$$

$$y = r - r\cos\vartheta = r(1 - \cos\vartheta)$$

$V_0 > 0$
Решение определено и при $V_0 = 0$:
$\beta = \frac{V_0^2}{2g} = 0 \Rightarrow \vartheta_0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = r(\vartheta - \sin\vartheta) \\ y = r(1 - \cos\vartheta) \end{matrix}$$

3.21 Минимальная поверхность вращения

$$J(x) := 2\pi \int_{-a}^{a} x\sqrt{1 + (x')^2}\,dt \to \inf$$

$$x(-a) = x(a) = A, \quad x \in C^1[-a, a]$$

$$a, A > 0$$

<-!-РИСУНОК-!->

Выбрать кривую так, чтобы площадь поверхности вращения была минимальной.
$J(x)$ — площадь поверхности вращения графика кривой $x(t)$

$$F = F(x, y) = x\sqrt{1 + y^2} \qquad U : \ x > 0$$

$$F'_y = x\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad F''_{yy} = \frac{x}{(1 + y^2)^{1/2}} > 0 \text{ на } U$$

Уравнение Эйлера (с понижением порядка):

$$x\sqrt{1 + (x')^2} - x'\frac{xx'}{\sqrt{1 + (x')^2}} = \lambda$$

$$x(t) = \lambda\sqrt{1 + (x')^2}, \ \lambda > 0$$

$x(t) \equiv \lambda -$ побочное решение
Гиперболические функции:

$$\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

<-!-РИСУНОК-!->

$$[\operatorname{ch} t]' = \operatorname{sh} t, \quad [\operatorname{sh} t]' = \operatorname{ch} t$$

$$\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$$

$$x'(t) = \operatorname{sh}\xi(t)$$

$$x(t) = \lambda\sqrt{1 + [^2 \operatorname{sh}\xi(t)]} = \lambda \operatorname{ch}\xi(t)$$

Дифференцируем по t:

$$\operatorname{sh}\xi(t) = (\lambda\xi')\operatorname{sh}\xi(t)$$

$$\lambda\xi' \equiv 1; \quad \xi' = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \xi = \frac{1}{\lambda}(t + c)$$

$$x(t) = \lambda \operatorname{ch}\frac{t + c}{\lambda}$$

$c = 0$ в силу симметричности краевых условий

$$\lambda : \quad \lambda \operatorname{ch}\frac{a}{\lambda} = A$$

Решение: $x(t) = \lambda \operatorname{ch}\frac{t}{\lambda}$
Γ_λ — график $x = \lambda \operatorname{ch}\frac{t}{\lambda}$, Γ_1 — график $x = \operatorname{ch} t$
$\Rightarrow \Gamma_\lambda = \lambda\Gamma_1$

$$(t, x) \in \Gamma_\lambda \Rightarrow (\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}) \in \Gamma_1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(t, x) \in \Gamma_1 \iff (t, x) \in \lambda\Gamma_1$$

<-!-РИСУНОК-!->

$\operatorname{ch}\frac{a}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}\frac{A}{a}$
$\vartheta = \frac{a}{\lambda}; \quad \varphi(\vartheta) = \frac{\operatorname{ch}\vartheta}{\vartheta} = \frac{A}{a}$

$$\varphi'(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^2}[\vartheta\operatorname{sh}\vartheta - \operatorname{ch}\vartheta] = \frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\vartheta^2}[\vartheta - \operatorname{cth}\vartheta]$$

$$\left(\operatorname{cth}\vartheta = \frac{e^\vartheta + e^{-\vartheta}}{e^\vartheta - e^{-\vartheta}} = \frac{e^{2\vartheta} + 1}{e^{2\vartheta} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2\vartheta} - 1}\right)$$

<-!-РИСУНОК-!->

$\varphi'(\vartheta_0) = 0 \qquad [\mathrm{cth}\,\vartheta_0 = \vartheta_0]$
$\varphi'(\vartheta) < 0$ при $\vartheta < \vartheta_0$, $\varphi'(\vartheta) > 0$ при $\vartheta > \vartheta_0$

<-!-РИСУНОК-!->

$\varphi'(\vartheta_0) = \frac{\mathrm{ch}\,\vartheta_0}{\mathrm{cth}\,\vartheta_0} = \mathrm{sh}\,\vartheta_0$
$\frac{A}{a} > \mathrm{sh}\,\vartheta_0 : \vartheta_1$ и ϑ_2 — корни уравнения $\varphi(\vartheta) = \frac{A}{a}, \quad 0 < \vartheta_1 < \vartheta_2$
$\lambda_1 = \frac{a}{\vartheta_1},\ \lambda_2 = \frac{a}{\vartheta_2}, \qquad \lambda_1 > \lambda_2 > 0$
$x_1(t) = \lambda_1\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{\lambda_1}, \quad x_2(t) = \lambda_2\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{\lambda_2}$

<-!-РИСУНОК-!->

Можно доказать, что усиленное условие Якоби выполняется на $x_1(t)$ (при большем λ) и не выполняется на $x_2(t)$.
Решение единственно, когда $\frac{A}{a} = \mathrm{sh}\,\vartheta_0$ (когда точка (a, A) лежит на касательной к гиперболическому косинусу).

[Если точка (a, A) вне конуса, то решение — 2 круга. У нас этого быть не может, т.к. $x > 0$.]

3.22 Изопериметрическая задача

$$\int_a^b F(t, x, x')\,dt \to \inf \tag{3.22.1}$$

$$\int_a^b G(t, x, x')\,dt = l$$

$$x(a) = A,\ x(b) = B,\ x \in C^1[a, b]$$

Объяснение названия "изопериметрическая задача":
при $A = B = 0$ второй интеграл дает ограничения на длину кривой.

Будем получать необходимые условия оптимальности.
$F, G \in C^1(U)$, Ω^0 — естественная область задания, $\Omega^0 \neq \varnothing$
x_0 — решение (3.22.1)

$$x(t, \xi) = x_0(t) + \xi_1 h_1(t) + \xi_2 h_2(t)$$

$$h_1,\ h_2 \in C_0^1[a, b], \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

$$f(\xi) := \int_a^b F\left(t, x(\xi, t), x'(\xi, t)\right)\,dt$$

$$g(\xi) := \int_a^b G\left(t, x(\xi, t), x'(\xi, t)\right)\,dt - l$$

$$f(\xi) \to \inf \tag{3.22.2}$$

$$g(\xi) = 0$$

$\xi = \mathbb{O}$ — решение (3.22.2) $[x(t, \mathbb{O}) = x_0(t)]$
В (3.22.2) h_1, h_2 фиксированы

$$\frac{\partial g(\mathbb{O})}{\partial \xi_2} = \int_a^b \left[G'_x h_2 + G'_{x'} h'_2\right]\,dt$$

Предположим, что
$G'_{x'} \notin C^1[a, b]$
или $G'_{x'} \in C^1[a, b]$, но $G'_x - \frac{d}{dt} G'_x \neq 0$ на $[a, b]$
В этом случае $\exists \tilde{h_2} \in C_0^1[a, b] : \quad \frac{\partial g(\mathbb{O})}{\partial \xi_2} \neq 0$
$\tilde{h_2}$ фиксирована навсегда
Аргумент $G'_x,\ G'_{x'}$ есть (t, x_0, x'_0)
$h_1 \in C_0^1[a, b]$ фиксирована
По теореме Куна-Таккера (точнее говоря, Лагранжа)

$$\exists u \in \mathbb{R} : \quad f'(\mathbb{O}) = u g'(\mathbb{O})$$

$$\frac{\partial f(\mathbb{O})}{\partial \xi_1} = u \frac{\partial g(\mathbb{O})}{\partial \xi_1}$$

$$\frac{\partial f(\mathbb{O})}{\partial \xi_2} = u \frac{\partial g(\mathbb{O})}{\partial \xi_2} \Rightarrow u = \left(\frac{\partial f(\mathbb{O})}{\partial \xi_2}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g(\mathbb{O})}{\partial \xi_2}\right)$$

u не зависит от h_1 !

$$0 = \frac{\partial f(\mathbb{O})}{\partial \xi_1} - u \frac{\partial g(\mathbb{O})}{\partial \xi_1} = \int_a^b \left[(F'_x - uG'_x)h_1 + (F'_{x'} - uG'_{x'})h'_1\right]\,dt$$

$L = F - uG$

$$\int_a^b \left[L'_x h_1 + L'_{x'} h'_1\right]\,dt = 0 \quad \forall h_1 \in C_0^1[a, b]$$

По основной лемме вариационного исчисления (лемма 3.1.2)

$$L'_{x'} \in C^1[a, b] \text{ и } L'_x - \frac{d}{dt} L'_{x'} = 0 \text{ на } [a, b] \tag{3.22.3}$$

К этому нужно добавить

$$\int_a^b G(t, x, x')\,dt = l, \quad x(a) = A,\ x(b) = B$$

3.23 Цепная линия

Пример 3.23.1 Цепная линия
Тяжелая однородная цепь длины $l > 2a$ подвешена в точках $(-a, A)$ и (a, A).
Описать положение цепи.

Решение.

$$x_* = \frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{p_1 + \dots + p_n}$$

p_i — вес i-го элемента (разбили цепь на маленькие части)
Предположим, что вес нити равен 1 ($\sum p_i = 1$).
$p_i = \frac{1}{l} ds_i$
Формула для центра тяжести:

$$\frac{1}{l}\int_{-a}^{a} x\,ds = \frac{1}{l}\int_{-a}^{a} x\sqrt{1 + (x')^2}\,dt$$

$$\int_{-a}^{a} x\sqrt{1 + (x')^2}\,dt \to \inf$$

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (x')^2}\,dt = l$$

$$x(-a) = x(a) = A$$

$$L = x\sqrt{1 + (x')^2} - u\sqrt{1 + (x')^2} = \sqrt{1 + (x')^2}(x - u)$$

Поскольку L не зависит от t, уравнение Эйлера выглядит как
$L - x' L'_{x'} := (x - u)\sqrt{1 + (x')^2} - x'(x - u)\frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} \equiv \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow x - u = \lambda\sqrt{1 + (x')^2}$

$x' = \operatorname{sh}\xi(t)$
$x - u = \lambda \operatorname{ch}\xi(t)$
Дифференцируем по t: $\operatorname{sh}\xi(t) = \lambda\xi' \operatorname{sh}\xi(t) \Rightarrow \lambda\xi' = 1 \Rightarrow \xi = \frac{t-c}{\lambda}$
$x = u + \lambda \operatorname{ch}\frac{t-c}{\lambda}$
$c - 0$ в силу симметричности краевых условий
$x = u + \lambda \operatorname{ch}\frac{t}{\lambda}$

$$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (x')^2}\,dt = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{t}{\lambda}}\,dt = 2\int_0^a \operatorname{ch}\frac{t}{\lambda} =$$

$$= 2\lambda \operatorname{sh}\frac{t}{\lambda}\Big|_0^a = 2\lambda \operatorname{sh}\frac{a}{\lambda}$$

$$2a\frac{\lambda}{a}\operatorname{sh}\frac{a}{\lambda} = l \Rightarrow \frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\vartheta} = \frac{l}{2a} > 1 \quad (\vartheta = \frac{a}{\lambda})$$

$\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\vartheta} = 1 + \frac{\vartheta^2}{3} + \frac{\vartheta^4}{5} + \dots$ строго возрастает от 1 до ∞
ϑ_0 — единственный корень уравнения $\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\vartheta} = \frac{l}{2a}$
$\lambda_0 = \frac{a}{\vartheta_0}$
$u_0 = A - \lambda_0 \operatorname{ch}\frac{a}{\lambda_0}$ (подставили $t = a$)
$\operatorname{ch}(t)$ — цепная линия