

ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

IV семестр (2005/06 уч. г.)

Специальность *Прикладная математика и информатика*

Лектор *Ю. А. Ильин*

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие решения, задачи Коши, поля наклонов, интегральной кривой, точки единственности и ветвления, примеры.
2. Уравнение с разделяющимися переменными.
3. Линейное уравнение первого порядка.
4. Уравнение первого порядка в симметричной форме. Поле наклонов. Обобщение понятия интегральной кривой. Признак обобщенной интегральной кривой.
5. Уравнение в полных дифференциалах. Теорема об общем решении.
6. Уравнение в полных дифференциалах. Необходимый и достаточный признак.
7. Системы дифференциальных уравнений. Нормальная система. Задача Коши. Сведение к нормальной системе. Запись в векторной форме.
8. Интегральное уравнение, эквивалентное задаче Коши.
9. Теорема Пеано: ϵ -решения, лемма 1 о сходимости.
10. Теорема Пеано: ломанные Эйлера, лемма 2 о ломаных Эйлера.
11. Теорема Пеано: собственно, завершение доказательства.
12. Связь между локальным и глобальным условиями Липшица на компакте.
13. Связь между локальным условием Липшица и дифференцируемостью.
14. Теорема Пикара: неравенство Гронуолла и доказательство единственности.
15. Определение продолжимости, необходимое и достаточное условие продолжимости за точку.
16. Теорема о существовании максимально продолженного решения.
17. Достаточное условие продолжимости, теорема о полном решении и компакте. Пример:

$$y' = x^3 - y^3$$

18. Продолжимость решений для случая, когда $G = (a, b)xR^n$. Пример:

$$x' = \frac{1}{1 + x^2 + t^2}$$

19. Теорема о существовании и единственности максимально продолженного решения для линейных систем.
20. Линейная однородная система: линейность пространства решений, линейная независимость решений, теорема о базисе и существование базиса.
21. Матричное уравнение. Определение и теоремы о фундаментальной матрице.
22. Вронскиан. Теорема о вронскиане. Теорема Лиувилля-Остроградского.
23. Структура множества решений линейной неоднородной системы. Теорема Лагранжа (метод вариации). Формула для решения задачи Коши.
24. Все о свойствах линейного однородного уравнения (сведение к линейной однородной системе).
25. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами: леммы о комплекснозначных решениях и об их о вещественности.
26. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами: лемма о линейной независимости квазимногочленов.
27. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами: метод Эйлера построения фундаментальной системы решений.

28. Все о свойствах линейного неоднородного уравнения, метод вариации Лагранжа (сведение к линейной неоднородной системе).
29. Метод неопределенных коэффициентов.
30. Определение экспоненты матрицы, корректность. Свойства 1 и 2.
31. Свойство 3 (коммутируемость). Пример с некоммутирующими матрицами.
32. Экспонента как фундаментальная матрица. Формулы для решений задач Коши для однородной и неоднородной систем.
33. Вычисление экспоненты матрицы. Ее структура.
34. Теоремы об оценке экспоненты матрицы.
35. Общие свойства перилдических систем. Теорема Пуанкаре.
36. Периодическая ЛОС: матрица монодромии, мультипликаторы, теорема о мультипликаторе.
37. О существовании периодических решений у ЛОС, понятие резонанса, равносильные определения резонанса.
38. Периодическая ЛНС, теорема о существовании периодических решений.
39. Пример грузика на пружинке.
40. Определение устойчивости. Притяжение. Примеры. Сведение к задаче об устойчивости нулевого решения.
41. Сведения вопроса об устойчивости Линейной Неоднородной Системы к вопросу об устойчивости Линейной Однородной Системы. Теорема об устойчивости Линейной Однородной Системы.
42. Теорема об устойчивости нулевого решения однородной системы с постоянной матрицей.
43. Классификация Пуанкаре для линейных систем на плоскости.
44. Метод функций Ляпунова, теорема об устойчивости.
45. Метод функций Ляпунова, теорема об асимптотической устойчивости.
46. О существовании функции Ляпунова для ЛОС в виде квадратичной формы.
47. Теорема об устойчивости по первому приближению.
48. Лемма об оценке разности двух решений.
49. Теорема об интегральной непрерывности.
50. Существование производных от решений по начальному данному x_0 .
51. Существование производных от решений по параметру и неформальный вывод для производной по t_0 .
52. Существование производных высших порядков.
53. Формулировка теоремы Коши для аналитической системы. Формулировка теоремы Ляпунова-Пуанкаре. Пример ее использования: задача Ньютона-Гука об отклонении падающего шарика.
54. Определение интеграла системы дифференциальных уравнений. Производная в силу системы. Необходимое и достаточное условие интеграла.
55. Применение интегралов: уравнение Ньютона и закон сохранения полной энергии, закон Кеплера о постоянстве секториальной скорости. Понижение порядка системы с помощью интегралов.
56. Функциональная независимость интегралов. Базис первых интегралов (общий интеграл). Теорема о базисе.
57. Теорема о существовании базиса.
58. Автономные системы. Основное свойство. Теорема единственности для траекторий. Различные свойства.
59. Виды траекторий. Теорема о классификации траекторий.