

### **Метрические пространства.**

1. Метрические пространства; примеры.
2. Последовательности Коши, полные пространства; примеры.
3. Единственность пополнения метрического пространства.
4. Существование пополнения метрического пространства.

### **Банаховы пространства.**

5. Линейные нормированные пространства (ЛНП) и их замкнутые подпространства, примеры ЛНП.
6. Банаховы пространства, примеры; сходимость рядов в банаховых пространствах, признак Коши.
7. Ряды в ЛНП и критерий полноты.
8. Полнота  $L^1$  и  $l^1$ .
9. Теорема Бэра о категории.
10. Типичная непрерывная функция нигде не дифференцируема.
11. Теорема об открытом отображении: часть 1.
12. Теорема об открытом отображении: часть 2.
13. Теорема об обратном отображении; теорема об эквивалентных нормах.
14. Теорема о замкнутом графике.
15. Линейные преобразования (операторы), критерий непрерывности линейного оператора.
16. Предложение о норме линейного оператора, примеры оценок норм.
17. Теорема Хеллингера-Тёплица.
18. Предложение о внутренних точках.
19. Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности).
20. Примеры банаховых пространств ограниченных функций.
21. Полнота  $C[a, b]$  и  $\varepsilon/3$ -метод.
22. Неравенства Юнга, Гёльдера.
23. Банахово пространство  $L^p$ ; неравенство Минковского.
24. Банахово пространство  $l^p$ ; неравенства Гёльдера и Минковского.
25. Вложенность пространств  $L^p$  и  $l^p$ .
26. Операторная норма; полнота пространства линейных операторов.
27. Сопряженное и второе сопряженное пространства; вычисление сопряженного к  $l^1$ .
28. Индукционный переход в абстрактной вещественной теореме Хана-Банаха.
29. Лемма Цорна и абстрактная теорема Хана-Банаха.
30. Комплексная абстрактная теорема Хана-Банаха.
31. Теорема Хана-Банаха; следствия о достаточном числе функционалов.

32. Каноническое вложение во второе сопряженное; построение пополнения с его помощью.
33. Пространства с сепарабельным сопряженным.
34. Вычисление сопряженного к  $c_0$ .
35. Сумма банаховых пространств.
36. Фактор банахова пространства по замкнутому подпространству.

### **Гильбертовы пространства.**

37. Предгильбертово пространство. Примеры. Два тождества: параллелограмма и поляризованное.
38. Ортонормированные семейства. Теорема Пифагора.
39. Неравенства Бесселя и Шварца.
40. Норма в гильбертовом пространстве; примеры.
41. Лемма о метрической проекции.
42. Теорема об ортогональной проекции.
43. Оператор ортогонального проектирования.
44. Лемма Рисса об общем виде функционала; примеры.
45. Рефлексивность и гильбертовы пространства.
46. Сходимость ортогональных рядов.
47. Существование ортонормированных базисов.
48. Теорема об ортонормированных базисах; равенство Парсевала.
49. Описание сепарабельных гильбертовых пространств.
50. Лемма о базисах и плотных конечных линейных комбинациях.
51. Обобщенное равенство Парсевала.
52. Леммы к теореме Стоуна-Вейерштрасса.
53. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.
54. Комплексная теорема Стоуна-Вейерштрасса.
55. Плотность  $C$  в  $L^2$ .
56. Система  $z^n$  - базис; примеры ортонормированных базисов и рядов Фурье.

### **Заряды и комплексные меры; функционалы на $L^p$ .**

57. Теорема Лебега о разложении: определения и формулировка, теорема Радона-Никодима.
58. Теорема Лебега о разложении: вспомогательный случай.
59. Теорема Лебега о разложении: случай конечных мер и общий случай.
60. Заряды и комплексные меры. Разложение Хана: построение.
61. Разложение Хана: проверка свойств.
62. Разложение Жордана; пример.
63. Полная вариация заряда и комплексной меры. Теорема о полной вариации.
64. Интегрирование по комплексной мере. Теорема Радона-Никодима для комплексных мер.
65. Пространство комплексных мер как банахово.
66. Общая форма линейного функционала на  $L^p$ : построение функции  $g$ .
67. Общая форма линейного функционала на  $L^p$ : свойства функции  $g$ .