Образующие и соотношения свободного произведения. Пусть две группы заданы своими образующиими и определяющими соотношениями; мы покажем, что свободное произведение порождается объединением множеств образующих сомножителей, а объединение множеств их определяющих соотношений является множеством определяющих соотношений свободного произведения. Точнее это утверждение сформулировано в следующей далее теореме. Но прежде, чем перейти к ней, приведем несколько лемм, на которых будет основано доказательство теоремы, но которые носят совершенно общий характер и постоянно используются в теоретико-групповых рассуждениях.

Лемма 1. *Пусть G – группа, H – нормальная подгруппа G, и пусть π – канонический эпиморфизм группы G на факторгруппу G/H. Если элементы $g_1, \ldots, g_n$ порождают группу G, то элементы $\pi(g_1), \ldots, \pi(g_n)$ порождают факторгруппу G/H.*

Доказательство. Пусть $\bar{g} \in G/H$; существует элемент $g \in G$, такой что $\bar{g} = gH = \pi(g)$. Поскольку $g_1, \ldots, g_n$ – порождающая система для группы G, найдутся натуральное число N, индексы $1 \leq i_s \leq n$ и показатели степени $\varepsilon_s = \pm 1$ $(1 \leq s \leq N)$, такие что $g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_{i_N}^{\varepsilon_N}$. Тогда $\bar{g} = \pi(g) = (\pi(g_{i_1}))^{\varepsilon_1}(\pi(g_{i_2}))^{\varepsilon_2} \ldots (\pi(g_{i_N}))^{\varepsilon_N}$. Таким образом, все элементы $\bar{g} \in G/H$ принадлежат подгрупе группы G/H, порожденной элементами $\pi(g_1), \ldots, \pi(g_n)$, а это как раз и означает, что элементы $\pi(g_1), \ldots, \pi(g_n)$ порождают факторгруппу G/H.

Лемма 2. *Пусть $g_1, \ldots, g_n$ – порождающая система группы G, $h_1, \ldots, h_n$ – порождающая система группы H. Если существуют такие гомоморфизмы групп $\varphi : G \to H$, $\psi : H \to G$, что $\varphi(g_i) = h_i$, $\psi(h_i) = g_i$ для всех i, $1 \leq i \leq n$, то группы G, H изоморфны.*

Доказательство. Поскольку $g_1, \ldots, g_n$ – порождающая система для группы G, для любого элемента $g \in G$ найдутся натуральное число N, индексы $1 \leq i_s \leq n$ и показатели степени $\varepsilon_s = \pm 1$ $(1 \leq s \leq N)$, такие что $g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_{i_N}^{\varepsilon_N}$. Если φ, ψ – такие гомоморфизмы групп $\varphi : G \to H$, $\psi : H \to G$, что $\varphi(g_i) = h_i$, $\psi(h_i) = g_i$ для всех i, $1 \leq i \leq n$, то

$$\psi(\varphi(g)) = \psi(\varphi(g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_{i_N}^{\varepsilon_N})) = \psi(h_{i_1}^{\varepsilon_1} h_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots h_{i_N}^{\varepsilon_N}) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_{i_N}^{\varepsilon_N} = g;$$

поэтому $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$. Точно так же доказываем, что $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_H$. Значит, отображения φ и ψ взаимно обратны, и потому биективны. Итак, каждое из отобрахений $\varphi : G \to H$, $\psi : H \to G$ – биективный гомоморфизм, т.е. изоморфизм групп.

Лемма 3. *Пусть $\psi' : G \to K$ – гомоморфизм групп, и пусть H – нормальная подгруппа G, а π – канонический эпиморфизм группы G на факторгруппу G/H. Если $H \subseteq \operatorname{Ker} \psi'$, то существует такой гомоморфизм $\psi : G/H \to K$, что $\psi'(g) = \psi(\pi(g))$ для всех $g \in G$.*

Доказательство. Поскольку $H \subseteq \operatorname{Ker} \psi'$, для любых $g \in G$, $h \in H$ будет $\psi'(gh) = \psi'(g)\psi'(h) = \psi'(g)e = \psi'(g)$. Поэтому на всех элементах смежного класса $gH \in G/H$ отображение ψ' принимает одно и то же значение, которое мы и примем за $\psi(gH)$. Построенное отображение $\psi : G/H \to K$ обладает указанным в формулировке леммы свойством: для любого $g \in G$ выполняется равенство $\psi(\pi(g)) = \psi(gH) = \psi'(g)$. Осталось показать, что ψ – гомоморфизм; но это очевидно: если g_1H, g_2H – любые смежные классы из G/H, то

$$\psi(g_1H \cdot g_2H) = \psi(g_1g_2H) = \psi'(g_1g_2) = \psi'(g_1)\psi'(g_2) = \psi(g_1H)\psi(g_2H).$$

Теорема. *Пусть F_1 – свободная группа со свободными образующими $x_1, \ldots, x_n$, F_2 – свободная группа со свободными образующими $y_1, \ldots, y_m$, G – свободная группа со свободными образующими $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. Пусть, далее, R_1 и R_2*

– произвольные подмножества F_1 и F_2, $H_1 = \langle\langle R_1 \rangle\rangle$ и $H_2 = \langle\langle R_2 \rangle\rangle$ – порожденные ими нормальные подгруппы этих групп, и пусть $K = \langle\langle R_1 \cup R_2 \rangle\rangle$ – нормальная подгруппа группы G, порожденная объединением множеств R_1 и R_2. Тогда группа G/K изоморфна свободному произведению групп F_1/H_1 и F_2/H_2.

Доказательство. Пусть $\pi_1 : F_1 \to F_1/H_1$, $\pi_2 : F_2 \to F_2/H_2$, $\pi : G \to G/K$ – канонические эпиморфизмы групп на факторгруппы. Введем обозначения:

$$\bar{x}_i = \pi_1(x_i), \quad \bar{y}_j = \pi_2(y_j), \quad \hat{x}_i = \pi(x_i), \quad \hat{y}_j = \pi(y_j) \qquad (1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m).$$

По лемме 1 элементы $\bar{x}_i$ $(1 \le i \le n)$ порождают группу F_1/H_1, элементы $\bar{y}_j$ $(1 \le j \le m)$ – группу F_2/H_2, а элементы $\hat{x}_i, \hat{y}_j$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ – группу G/K. Далее, всякий элемент из свободного произведения $(F_1/H_1) * (F_2/H_2)$ является произведением нескольких сомножителей, каждый из которых принадлежит одной из групп (F_1/H_1), (F_2/H_2), и поэтому сам представляется в виде произведения, каждый сомножитель которого равен или одному из элементов $\bar{x}_i$, $\bar{x}_i^{-1}$ $(1 \le i \le n)$, или одному из элементов $\bar{y}_j$, $\bar{y}_j^{-1}$ $(1 \le j \le m)$. Поэтому свободное произведение $(F_1/H_1) * (F_2/H_2)$ порождается элементами $\bar{x}_i, \bar{y}_j$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$.

По лемме 2, для доказательства теоремы достаточно построить такие гомоморфизмы групп $\varphi : (F_1/H_1) * (F_2/H_2) \to G/K$, $\psi : G/K \to (F_1/H_1) * (F_2/H_2)$, что для всех i, j, $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$, выполняются равенства

$$\varphi(\bar{x}_i) = \hat{x}_i, \quad \varphi(\bar{y}_j) = \hat{y}_j, \quad \psi(\hat{x}_i) = \bar{x}_i, \quad \psi(\hat{y}_j) = \bar{y}_j.$$

Этим мы и занимаемся в оставшейся части доказательства.

Построение гомоморфизма ψ. Поскольку x_i, y_j – свободные образующие группы G, существует гомоморфизм $\psi' : G \to (F_1/H_1) * (F_2/H_2)$, такой что $\psi'(x_i) = \bar{x}_i$, $\psi'(y_j) = \bar{y}_j$ для всех i, j. Заметим, что свободная группа F_1 естественно вложена в свободную группу G, поскольку множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ее свободных образующих составляют часть множества $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ свободных образующих группы G. Ограничение гомоморфизма ψ' на F_1 совпадает с канонической проекцией π_1 группы F_1 на первый сомножитель свободного произведения $(F_1/H_1)*(F_2/H_2)$, и, поэтому $\operatorname{Ker}\psi' \supseteq \operatorname{Ker}\pi_1$; следовательно, $R_1 \subseteq \langle\langle R_1 \rangle\rangle = H_1 = \operatorname{Ker}\pi_1 \subseteq \operatorname{Ker}\psi'$. Аналогично, $R_2 \subseteq \operatorname{Ker}\psi'$, а значит, и наименьшая нормальная подгруппа $K = \langle\langle R_1 \cap R_2 \rangle\rangle$ группы G, содержащая R_1 и R_2, тоже содержится в $\operatorname{Ker}\psi'$. По лемме 3, существует гомоморфизм $\psi : G/K \to (F_1/H_1) * (F_2/H_2)$, такой что $\psi(\pi(g)) = \psi'(g)$ для любого $g \in G$; в частности, для всех i, j, $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ выполняются равенства

$$\psi(\hat{x}_i) = \psi(\pi(x_i)) = \psi'(x_i) = \bar{x}_i, \qquad \psi(\hat{y}_j) = \psi(\pi(y_j)) = \psi'(y_j) = \bar{y}_j.$$

Построение гомоморфизма φ. Пусть φ_1' – композиция естественного вложения F_1 в G, о котором говорилось выше, и канонического эпиморфизма $\pi : G \to G/K$. Поскольку $H_1 = \langle\langle R_1 \rangle\rangle \subseteq \langle\langle R_1 \cap R_2 \rangle\rangle = K = \operatorname{Ker}\pi$, по лемме 3 существует гомоморфизм $\varphi_1 : F_1/H_1 \to G/K$, такой что $\varphi_1(\pi_1(x)) = \varphi_1'(x)$ для любого $x \in F_1$. В частности, $\varphi_1(\bar{x}_i) = \varphi_1(\pi_1(x_i)) = \varphi_1'(x_i) = \pi(x_i) = \hat{x}_i$ $(1 \le i \le n)$. Точно так же строится гомоморфизм $\varphi_2 : F_2/H_2 \to G/K$, такой что $\varphi_2(\bar{y}_j) = \hat{y}_j$ для всех j, $1 \le j \le m$. По основному свойству свободного произведения, существует гомоморфизм $\varphi : (F_1/H_1) * (F_2/H_2) \to G/K$, ограничение которого на F_1/H_1 равно φ_1, а ограничение на F_2/H_2 равно φ_2. Для всех i, j, $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ выполняются нужные нам равенства

$$\varphi(\bar{x}_i) = \varphi_1(\bar{x}_i) = \hat{x}_i, \qquad \varphi(\bar{y}_j) = \varphi_2(\bar{y}_j) = \hat{y}_j$$

Разрешимость группы верхних треугольных матриц. Пусть k – поле; обозначим через $T = T_n(k)$ группу обратимых верхних треугольных матриц порядка n с компонентами из k. Диагональ любой матрицы из T состоит из ненулевых элементов (иначе матрица не была обратима), а все элементы ниже диагонали равны 0.

Теорема. *Группа T разрешима.*

Доказательство. Как обычно, для матрицы A через A_{ij} обозначается элемент из k, находящийся в матрице A на пересечении i-й строки и j-го столбца. Тогда

$$T = \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \,|\, A_{ij} = 0 \text{ при } i > j\}.$$

Введем еще несколько обозначений:

$$U_s = \{B \in k_n \,|\, B_{ij} = 0 \text{ при } j < i + s\}, \qquad X_s = \{E + B \,|\, B \in U_s\} \qquad (1 \le s < n).$$

Таким образом, в матрицах из U_s равны не только все элементы под диагональю, но и все элементы на диагонали, а также еще на $s - 1$ диагональных рядах, следующих за главной диагональю. Заметим, что U_{n-1} состоит только из нулевой матрицы, и потому $X_{n-1} = E$.

Определим по индукции группы $T^{(s)}$, положив $T^{(1)} = [T, T]$, $T^{(s+1)} = [T^{(s)}, T^{(s)}]$. Для доказательства разрешимости T достаточно показать, что $T^{(n-1)} = E$. Поскольку $X_{n-1} = E$, это сразу вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Для любого s, $1 \le s < n$, имеет место включение $T^{(s)} \subseteq X_s$.*

Дальнейшая часть этого раздела посвящена доказательству леммы 1.

Лемма 2. *Если $1 \le s < n - 1$ и $A, B \in U_s$, то $A, B \in U_{s+1}$.*

Доказательство. Если $A_{ij} = B_{lr} = 0$ при $j < i + s$, $r < l + s$, то при $j < i + s + 1$ будет

$$(AB)_{ij} = \sum_{u=1}^{n} A_{iu} B_{uj} = 0,$$

так как если бы слагаемое $A_{iu}B_{uj}$ этой суммы было отлично от 0, то оба сомножителя были бы отличны от 0, и мы имели бы $u \ge i + s$, $j \ge u + s$, откуда следовало бы, что $i + s + 1 > j \ge u + s \ge i + s + s \ge i + s + 1$, а это невозможно. Значит, $A, B \in U_{s+1}$.

Лемма 3. *Если $1 \le s < n - 1$ и $A \in U_s$, то матрица $E + A$ обратима, и существует такая матрица $A_1 \in U_{s+1}$, что $(E + A)^{-1} = E - A + A_1$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $A^{n-s-1} \in U_{n-1} = 0$. Поэтому

$$E - A + A^2 - \ldots + (-1)^{n-s-2} A^{n-s-2}$$

– обратная к $E + A$ матрица, так как ее произведение с матрицей $E + A$ равно $E - (-1)^{n-s-1} A^{n-s-1} = E$. Осталось заметить, что все матрицы $A^2, \ldots, A^{n-s-2}$ принадлежат U_{s+1} по лемме 2, и потому

$$A_1 = (E + A)^{-1} - (E - A) = A^2 - \ldots + (-1)^{n-s-2} A^{n-s-2} \in U_{s+1}.$$

Лемма 4. *Если $1 \le s < n - 1$ и $C, D \in X_s$, то $[C, D] \in X_{s+1}$.*

Доказательство. По определению множества X_s существуют такие матрицы $A, B \in U_s$, что $C = E + A$, $D = E + B$. Далее, по лемме 3 существуют такие матрицы $A_1, B_1 \in U_{s+1}$, что $C^{-1} = E - A + A_1$, $D^{-1} = E - B + B_1$. Поэтому

$$\begin{aligned}[C, D] = CDC^{-1}D^{-1} &= (E + A)(E + B)(E - A + A_1)(E - B + B_1) = \\ &= E + (A + B - A - B + A_1 + B_1) + H = E + A_1 + B_1 + H,\end{aligned}$$

где через H обозначена сумма произведений по меньшей мере двух (быть может, совпадающих) из элементов A, A_1, B, B_1, каждый из которых принадлежит U_s. По лемме 2 каждое из этих произведений, а с ними и их сумма H, принадлежит U_{s+1}. Поскольку и $A_1, B_1 \in U_{s+1}$, мы получаем, что $A_1 + B_1 + H \in U_{s+1}$, а потому $[C, D] = E + A_1 + B_1 + H \in X_{s+1}$.

Лемма 5. *Если $A, B \in T$, то $(AB)_{ii} = A_{ii}B_{ii}$ для любого i, $1 \le i \le n$.*

Доказательство. Очевидно, но все же приведем доказательство:

$$(AB)_{ii} = \sum_{u=1}^{n} A_{iu}B_{ui} = A_{ii}B_{ii} + \sum_{u<i} A_{iu}B_{ui} + \sum_{u>i} A_{iu}B_{ui} = A_{ii}B_{ii},$$

так как при $u < i$ будет $A_{iu} = 0$, а при $u > i$ будет $B_{ui} = 0$.

Лемма 6. *Если $A, B \in T$, то $[A, B] \in X_1$.*

Доказательство. Поскольку $[A, B] \in T$, а X_1, очевидно, состоит из тех треугольных матриц, у которых все диагональные элементы равны 1, достаточно доказать, что $[A, B]_{ii} = 1$ для всех i. Применяя несколько раз лемму 5, мы получим равенство

$$A_{ii}B_{ii} = (AB)_{ii} = (ABA^{-1}B^{-1}BA) = ([A, B]BA)_{ii} = [A, B]_{ii}(BA)_{ii} = [A, B]_{ii}B_{ii}A_{ii};$$

но диагональные элементы матриц $A, B \in T$ отличны от 0, и потому предыдущее равенство двух элементов поля k можно сократить на $A_{ii}B_{ii}$, и мы получим желаемый результат $1 = [A, B]_{ii}$.

Теперь легко завершить доказательство леммы 1 индукцией. По лемме 6 для любых матриц $A, B \in T$ их коммутатор $[A, B]$ принадлежит X_1; поэтому $T^{(1)} = [T, T] \subseteq X_1$. Пусть уже доказано, что $T^{(s)} \subseteq X_s$. Тогда по лемме 4 для любых матриц $A, B \in T^{(s)} \subseteq X_s$ их коммутатор $[A, B]$ принадлежит X_{s+1}, и потому $T^{(s+1)} = [T^{(s)}, T^{(s)}] \subseteq X_{s+1}$. Тем самым мы доказали лемму 1, а с ней и теорему.