§1 Векторные пространства

Определение 1.1. Множество V вместе с операциями $+ : V \times V \to V$ (сложение) и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (умножение на число) называется *(вещественным) векторным пространством*, если выполнены следующие аксиомы.

1. $v + (u + w) = (v + u) + w \ \forall v, u, w \in V$ (ассоциативность сложения)
2. $v + u = u + v \ \forall v, u \in V$ (коммутативность)
3. $\exists! \mathbf{0} \in V : v + \mathbf{0} = v \ \forall v \in V$ (ноль)
4. $\forall v \in V \ \exists! - v \in V : v + (-v) = \mathbf{0}$ (существование обратного)
5. $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ (дистрибутивность I)
6. $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ (ассоциативность умножения на число)
7. $a \cdot (v + u) = a \cdot v + a \cdot u \ \forall a \in \mathbb{R}, \forall v, u \in V$ (дистрибутивность II)
8. $1 \cdot v = v \ \forall v \in V$ (унитарность)

Элементы векторного пространства (в.п.) называются *векторами*.

Замечание. Единственность нуля и обратного следует из остальных аксиом.

Примеры. $V = \mathbb{R}$ — вещественная прямая является в.п.

Множество $\mathcal{L}(X, V)$ отображений произвольного множества X в в.п. V является в.п., если определить сложение и умножение на число естественным образом. А именно, $\forall f, g \in \mathcal{L}(X, V)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$ считать, что

$$[f + g](x) = f(x) + g(x), \quad [a \cdot f](x) = a \cdot f(x).$$

В случае, когда $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, в.п. $\mathcal{L}(X, V)$ называется *координатным n-мерным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$.

Предложение 1.2. *Пусть V — в.п., тогда*

1. $0 \cdot v = \mathbf{0} \ \forall v \in V$

2. $(-1) \cdot v = -v \ \forall v \in V$

3. Равенство $a \cdot v = \mathbf{0}$ означает, что либо $a = 0$, либо $v = \mathbf{0}$

4. Для любого набора чисел $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ и любого набора векторов $\{v_i\}_{i=1}^n \subset V$ однозначно определен вектор

$$v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \ldots + a_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i,$$

называемый линейной комбинацией векторов $\{v_i\}$ с коэффициентами $\{a_i\}$.

Доказательство. 1. Из пятой и восьмой аксиом следует, что $0 \cdot v + v = 0 \cdot v + 1 \cdot v = (0+1) \cdot v = 1 \cdot v = v$. Прибавив к обеим частям полученного равенства $0 \cdot v + v = v$ вектор $-v$ (существующий по четвертой аксиоме) получим искомое равенство.

2. В силу единственности обратного, утверждение следует из выкладки $(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v = \mathbf{0}$. Далее мы будем писать $v - u$ вместо $v + (-1) \cdot u$.

3. Пусть $a \cdot v = \mathbf{0}$. Если $a = 0$, то доказывать нечего. Пусть $a \neq 0$. Заметим, что $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$[1]. Поэтому $v = 1 \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

4. Положим $a_i \cdot v_i = u_i$ $\forall i \in \overline{1, n}$. Определим сумму $r \in \mathbb{N}$ векторов так:

$$\sum_{i=1}^r u_i = ((\ldots((u_1 + u_2) + u_3) + \ldots) + u_{r-1}) + u_r.$$

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^k u_i + \sum_{i=k+1}^l u_i = \sum_{i=1}^l u_i$$

для любого набора векторов $\{w_i\} \subset V$ и натуральных чисел $k, l \in \mathbb{N}$. Проведем индукцию. Для $l = 3$ это — первая аксиома. Индукционный шаг:

$$\sum_{i=1}^k u_i + \sum_{i=k+1}^l u_i = \sum_{i=1}^k u_i + \sum_{i=k+1}^{l-1} u_i + u_l = \sum_{i=1}^{l-1} u_i + u_l = \sum_{i=1}^l u_i.$$

Доказанное равенство говорит о произвольности расстановки скобок в сумме $\sum_i u_i$, а значит — о ее определенности. □

Определение 1.3. Пусть V — в.п. Подмножество $U \subset V$ называется *линейным подпространством* (лин. п/п.), если $\forall v, u \in U$, $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем $v + a \cdot u \in U$.

[1] действительно, $a \cdot \mathbf{0} + a \cdot \mathbf{0} = a \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a \cdot \mathbf{0} \Rightarrow a \cdot \mathbf{0} = a \cdot \mathbf{0} - a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Примеры. Положим по определению

$$V^* = \{f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) :\ f(v + a \cdot u) = f(v) + af(u)\}.$$

Легко видеть, что V^* — лин. п/п. в в.п. V. Оно называется *сопряженным пространством* пространству V.

Пространство $C([0,1])$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ является лин. п/п. в $\mathcal{L}([0,1], \mathbb{R})$.

Определение 1.4. Набор векторов $\{v_i\}_{i=1}^n \subset V$ называется *линейно независимым*, если из равенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = \mathbf{0}$$

следует, что все числа $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ равны нулю (такие линейные комбинации называются *тривиальными*).

Определение 1.4′. Набор векторов $\{v_i\}_{i=1}^n \subset V$ называется *линейно независимым*, если никакой из векторов нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

Определение 1.5. *Линейной оболочкой* (обозначение $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$) набора векторов $\{v_i\}_{i=1}^n \subset V$ называется множество линейных комбинаций этих векторов со всевозможными коэффициентами:

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i \in V \ :\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Определение 1.6. Набор векторов $\{v_i\}_{i=1}^n \subset V$ называется *максимальным*, если $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$.

Замечание. Далее мы рассматриваем векторные пространства, в которых имеется конечный максимальный набор векторов.

Определение 1.7. Набор векторов $\{v_i\}_{i=1}^n \subset V$ называется *базисом* пространства V, если он является максимальным и линейно независимым.

Предложение 1.8. *1) В любом в.п. имеется базис. 2) Количество векторов в любых двух базисах одного в.п. одинаково.*

Доказательство.[2] 1. Пусть $M = \{v_i\}_{i=1}^N \subset V$ — максимальный набор векторов (он найдется согласно замечанию перед определением базиса). Пусть e_1 — ненулевой вектор из набора M и

$$M_1 = \Big\{ v_i \in M \setminus \{e_1\} \,:\, \mathrm{span}\{e_1, v_i\} \neq \mathrm{span}\{e_1\} \Big\}.$$

Пусть e_2 — какой-либо вектор из набора M_1 (там уже нет нулевых векторов). Вектора $e_1, e_2 \in V$ линейно независимы по построению.

Положим

$$M_2 = \Big\{ v_i \in M_1 \setminus \{e_2\} \,:\, \mathrm{span}\{e_1, e_2, v_i\} \neq \mathrm{span}\{e_1, e_2\} \Big\}.$$

Продолжая этот процесс получим линейно независимые векторы $\{e_k\}$ и множества

$$M_k = \Big\{ v_i \in M_{k-1} \setminus \{e_k\} \,:\, \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k, v_i\} \neq \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \Big\}.$$

В силу того, что число элементов в M_k строго меньше числа элементов в M_{k-1}, имеем $M_n = \emptyset$ для некоторого $n \leq N$. Таким образом получим линейно независимую систему векторов $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ для которой $M \subset \mathrm{span}\{E\}$. Следовательно эта система максимальна и является базисом.

2. Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\{u_1, \ldots, u_m\}$ — два базиса в в.п. V и $m \geq n$. Набор $\{v_1, \ldots, v_n, u_1\}$ является максимальным и линейно зависимым. Меняя, если это необходимо, порядок векторов $\{v_1, \ldots, v_n\}$ добьемся того, чтобы коэффициент a_1 в линейной комбинации

$$u_1 = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

не равен нулю. Тогда, очевидно, набор $\{u_1, v_2, \ldots, v_n\}$ является базисом в V, а набор $\{u_1, v_2, \ldots, v_n, u_2\}$ максимальным и линейно зависимым. Разложим вектор u_2 по этому новому базису:

$$u_2 = b_1 u_1 + \sum_{i=2}^n b_i v_i.$$

Ситуация, когда $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$ невероятна, т.к. тогда u_2 выражался бы через u_1. Опять меняя, если это необходимо, порядок векторов $\{v_2, \ldots, v_n\}$ добьемся того, чтобы коэффициент b_2 в разложении вектора u_2 не был равен нулю.

Значит набор $\{u_1, u_2, v_3, \ldots, v_n\}$ опять является базисом. Продолжая процедуру получим, что набор векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ также является базисом, что возможно только в случае $n = m$. $\square$

[2] проще, чем было на лекции

Обозначение. Таким образом количество векторов в базисе в.п. V является его инвариантом (зависит только от самого пространства). Это количество называется *размерностью* пространства и обозначается $\dim V$.

Предложение 1.9. *Набор векторов $\{v_1, \ldots, v_n\}$ в.п. V является базисом в том и только в том случае, если любой вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации*

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Доказательство.[$\Rightarrow$] Пусть набор $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ является базисом и

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \quad -$$

два представления вектора v в виде линейной комбинации. Вычитая одну сумму из другой получим

$$\mathbf{0} = v - v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) v_i.$$

В силу линейной независимости набора $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ такое возможно только в случае $a_i = b_i$ для всех $i \in \overline{1, n}$.

[$\Leftarrow$] В силу того, что любой вектор представляется в виде линейной комбинации, набор $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ максимален. Представим нуль в виде линейной комбинации

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

В силу единственности представления это возможно только в случае $a_i = 0$ для всех $i \in \overline{1, n}$. Поэтому набор $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ линейно независим. $\square$

Предложение 1.10. *Любая линейно независимая система векторов $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ может быть дополнена до базиса пространства V.*

Доказательство. Если $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = V$, то доказывать нечего (исходная система сама является базисом). Пусть имеется ненулевой вектор $u \in V \setminus \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Положим $v_{k+1} = u$.

Продолжая процесс, через $\dim V - k$ шагов получим искомый базис

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

пространства V $(n = \dim V)$. $\square$

Определение 1.11. Пусть V и W — в.п. Отображение $f \in \mathcal{L}(V, W)$ называется линейным, если

$$\forall v, u \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{имеем} \quad f(v + \lambda u) = f(v) + \lambda f(u).$$

Множества всех линейных отображений из $\mathcal{L}(V, W)$ обозначается символом $l(V, W)$. Это — лин. п/п.

Примеры. $l(V, \mathbb{R}) = V^*$ — сопряженное пространство.

Множество $l(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ состоит из функций вида $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

Определение 1.12. Пусть V и W — в.п. и $f \in l(V, W)$.

Множество

$$\ker f = \{v \in V : f(v) = \mathbf{0}\} \subset V$$

называется *ядром* отображения f.

Множество

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w\} \subset W$$

называется *образом* отображения f.

Теорема 1.13. *Пусть* $f \in l(V, W)$.

1. *Множества* $\ker f$ *и* $\operatorname{im} f$ *— линейные подпространства в векторных пространствах* V *и* W *соответственно.*

2. $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$.

Доказательство. 1. Пусть $v, u \in \ker f$ и $a \in \mathbb{R}$. Имеем $f(v + au) = f(v) + af(u) = \mathbf{0} + a\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Поэтому $v + au \in \ker f$. Теперь пусть $w, w' \in \operatorname{im} f$ и $a \in \mathbb{R}$. По определению множества $\operatorname{im} f$ существуют вектора $v, v' \in V$, что $f(v) = w$, $f(v') = w'$. Таким образом

$$w + aw' = f(v) + af(v') = f(v + av').$$

Таким образом $w + aw' \in \operatorname{im} f$.

2[3]. Пусть $\{e_1, \ldots, e_m\}$ — базис в лин. п/п. $\ker f$ ($\dim \operatorname{im} f = m$). Достроим его до базиса $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ пространства V ($\dim V = n$). Таким образом

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\{f(e_{m+1}), \ldots, f(e_n)\}.$$

[3]намного короче, чем на лекции

Покажем, что вектора $f(e_{m+1}), \dots, f(e_n) \in \operatorname{im} f$ линейно независимы. Действительно, если

$$\mathbf{0} = \sum_{i=m+1}^{n} a_i f(e_i) = \sum_{i=m+1}^{n} f(a_i e_i) = f\left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i\right),$$

то

$$u = \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i \in \ker f.$$

Это означает, что вектор u линейно выражается через вектора $e_1, \dots, e_m \in \ker f$ с некоторыми коэффициентами $\{b_i\}_{i=1}^{m}$:

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{m} b_i e_i.$$

В силу того, что вектора $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ образуют базис пространства V, все числа a_i и b_i нулевые. Таким образом вектора $f(e_{m+1}), \dots, f(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{im} f$. Следовательно $\dim \operatorname{im} V = n - m$. $\square$

Предложение 1.14. *Пусть V — в.п. и $\{v_1, \dots, v_n\}$ — базис в V.*

1. *Линейное отображение $f \in l(V, W)$ однозначно определено своими значениями $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.*

2. *Обратно, для любых векторов $w_1, \dots, w_n \in W$ существует единственное отображение $f \in l(V, W)$, для которого $f(v_i) = w_i$ при всех $i \in \overline{1, n}$.*

Доказательство. 1. Пусть $g \in l(V, W)$ — линейное отображение, для которого $g(v_i) = f(v_i)$ при всех $i \in \overline{1, n}$. Для любого вектора $v \in V$ имеем

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = f(v),$$

где

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad -$$

представление вектора v в виде линейной комбинации векторов базиса. Таким образом $f \equiv g$.

2. Определим значение отображения $f : V \to W$ на векторе

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \text{формулой} \quad f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i.$$

Его линейность очевидна. Единственность следует из п. 1. $\square$

Лемма 1.15. *Если биективное отображение $f : V \to W$ линейно, то обратное отображение $f^{-1} : W \to V$ также линейно.*

Доказательство. Биективность линейного отображения f равносильна тому, что $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ и $\operatorname{im} f = W$. Пусть $w, w' \in W$ и $a \in \mathbb{R}$. Так как $\operatorname{im} f = W$ существуют вектора $v, v' \in V$, для которых $f(v) = w$, $f(v') = w'$. Итак,

$$f^{-1}(w + aw') = f^{-1}(f(v) + af(v')) = f^{-1}(f(v + av')) =$$

$$= v + av' = f^{-1}(w) + af^{-1}(w').$$

□

Определение 1.16. Линейное биективное отображение $f : V \to W$ называется *изоморфизмом* векторных пространств V и W.

Векторые пространства, для которых существует хотя бы один изоморфизм, называются *изоморфными* (обозначение $V \simeq W$).

Теорема 1.17. *Векторные пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Доказательство.[⇒] Пусть $V \simeq W$ и $f : V \to W$ — некоторый изоморфизм. И $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис пространства V. В силу биективности справедливо равенство $\operatorname{im} f = W$, поэтому $\operatorname{span}\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\} = W$ (максимальность образа базиса). Линейная независимость векторов $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ также очевидна. Таким образом $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ — базис пространства W. Поэтому $\dim V = \dim W$.

[⇐] Теперь пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\{w_1, \ldots, w_n\}$ — базисы пространств V и W соответственно. Согласно 1.14, определим отображение $f \in l(V, W)$ равенствами $f(v_i) = w_i$. Покажем, что это — изоморфизм. Ясно, что $\operatorname{im} f = W$ (любой вектор из W представим в виде линейной комбинации базисных векторов). Из равенства

$$\mathbf{0} = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

следует, что $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, поэтому отображение f биективно. Согласно линейности, это — изоморфизм. □

Пример. Арифметическое n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ определяется как множество всех столбцов вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Сложение и умножение на число задаются формулами

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ax_n \end{pmatrix}.$$

В качестве базиса *могут* быть взяты столбцы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В силу последней теоремы, говоря об n-мерном векторном пространстве, мы всегда имеем ввиду $\mathbb{R}^n$.