§2 Аффинные пространства

Определение 2.1. *Аффинным пространством* называется множество $\mathcal{A}$, снабженное отображением $- : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ (в векторное пространство V, называемое *ассоциированным с* $\mathcal{A}$), которое удовлетворяет следующим аксиомам.

1. $(A - B) + (B - C) = A - C\ \forall A, B, C \in \mathcal{A}$ (здесь плюс и минус в разных пространствах)

2. $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall v \in V\ \exists!\ B \in \mathcal{A} : B - A = v$ (иногда мы будем писать $B = A + v$).

Элементы аффинного пространства называются *точками.* Запись "$(\mathcal{A}, V)$ — аффинное пространство" означает, что в.п. V ассоциировано с $\mathcal{A}$.

Легко видеть, что в аффинном пространстве $A - A = \mathbf{0}$ и $A - B = -(B - A)$.

Примеры. $\mathcal{A}$ — плоскость (соотв. пространство) и $V = \mathbb{R}^2$ (соотв. $V = \mathbb{R}^3$). Здесь $A - B = \vec{BA}$.

Обобщение предыдущего примера. Пусть V — в.п. и $\mathcal{A} = V$. Ясно, что (V, V) — аффинное пространство. Действительно, достаточно определить операцию $- : V \times V \to V$ как обычное вычитание векторов

Определение 2.2. Пусть $(\mathcal{A}, V)$ и $(\mathcal{A}', V')$ — два аффинных пространства. Отображение $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ называется *аффинным*, если вектор $f(A + v) - f(A) \in V'$ не зависит от точки $A \in \mathcal{A}$ для любого вектора $v \in V$ и отображение $df : V \to V'$, определенное формулой

$$\mathrm{d}\, f(v) = f(A + v) - f(A),$$

линейно. Множество аффинных отображений из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$ обозначается $\mathrm{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$.

Линейное отображение $\mathrm{d}\, f$ называется *дифференциалом*, или *линейной частью* отображения f.

Примеры. Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является аффинным отображением пространства $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ в себя, если $\mathrm{d}\, f(t) = f(x + t) - f(x)$ — линейное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Согласно примеру перед определением 1.12, $\mathrm{d}\, f(t) = kt$ и поэтому $f(x+t) - f(x) = kt$, откуда $f(t) = kt + f(0)$. Таким образом любое аффинное отображение $f \in \mathrm{aff}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ прямой в себя имеет вид $f(t) = kt + b$.

Отображение $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, для которого $\mathrm{d}\, f(v) = v$ называется *сдвигом.*

Предложение 2.3. *Пусть* $(\mathcal{A}, V)$ *и* $(\mathcal{A}', V')$ *— аффинные пространства и* $f \in \operatorname{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$. *Следующие два утверждения равносильны.*

1. f *— биекция*

2. $\mathrm{d}\, f$ *— изоморфизм.*

Доказательство. [$1 \Rightarrow 2$] Допустим $v \in \ker \mathrm{d}\, f$ и $A \in \mathcal{A}$. Тогда $\mathrm{d}\, f(v) = f(A+v) - f(A) = \mathbf{0}$, поэтому $f(A+v) = f(A)$, откуда $v = \mathbf{0}$ в силу биективности f. Таким образом линейная часть биективного отображения имеет нулевое ядро. Теперь пусть $v' \in V'$, $A' \in \mathcal{A}'$ и $B' = A' + v'$ (точка B' существует по второй аксиоме). Положим $A = f^{-1}(A')$, $B = f^{-1}(B')$ (отображение f биективно). Определим вектор $v \in V$ так: $v = B - A$. Ясно, что $\mathrm{d}\, f(v) = v'$, поэтому $v' \in \operatorname{im} f$. В силу произвольности вектора v' имеем $\operatorname{im} f = V'$, поэтому $f : V \to V'$ — изоморфизм.

[$2 \Rightarrow 1$] Пусть $A, B \in \mathcal{A}$ — произвольные точки. Если $f(B) = f(A)$, то $\mathrm{d}\, f(B - A) = f(B) - f(A) = \mathbf{0}$, откуда $A = B$ в силу инъективности $\mathrm{d}\, f$. Таким образом f само инъективно. Теперь фиксируем точку $A \in \mathcal{A}$ и пусть $B' \in \mathcal{A}'$ — произвольная точка. Положим $B = A + [\mathrm{d}\, f]^{-1}(B' - f(A))$. Ясно, что

$$f(B) - f(A) = \mathrm{d}\, f\Big([\mathrm{d}\, f]^{-1}(B' - f(A))\Big) = B' - f(A),$$

поэтому $f(B) = B'$. В силу произвольности точки B' отображение f сюръективно.□

Предложение 2.4. *Если аффинное отображение биективно, то его обратное также аффинно.*

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ — аффинная биекция и $\mathrm{d}\, f$ — ее линейная часть. Согласно биективности f и тому, что отображение $\mathrm{d}\, f$ — изоморфизм векторных пространств, имеем точку $A \in \mathcal{A}$ и вектор $v \in V$, для которых $f(A) = A'$ и $\mathrm{d}\, f(v) = v'$. Таким образом

$$f^{-1}(A' + v') - f^{-1}(A') = f^{-1}\Big(f(A) + \mathrm{d}\, f(v)\Big) - A =$$

$$= f^{-1}\Big(f(A + v)\Big) - A = v = [\mathrm{d}\, f]^{-1}(v').$$

□

Определение 2.5. Аффинное биективное отображение $f \in \operatorname{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ называется *изоморфизмом аффинных пространств*. Пространства, между которыми имеется хотя бы один изоморфизм, называются *изоморфными*.

Теорема 2.6. *Аффинные пространства* $(\mathcal{A}, V)$ *и* $(\mathcal{A}', V')$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $\dim V = \dim V'$.

Доказательство. [$\Rightarrow$] Если $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — аффинная биекция, то, по предложению 2.3, $\mathrm{d}\, f : V \to V'$ — изоморфизм. Тогда по теореме 1.17 имеем $\dim V = \dim V'$.

[$\Leftarrow$] Пусть $\dim V = \dim V'$. Выберем некоторый изоморфизм $\psi : V \to V'$, и точки $A \in \mathcal{A}$ и $A' \in \mathcal{A}'$. Для произвольного вектора $v \in V$ положим

$$f(A + v) = \psi(v) + A'.$$

Ясно, что $f(A) = A'$ и $\mathrm{d}\, f = \psi$. Таким образом отображение f — аффинная биекция. □

Размерностью аффинного пространства $\mathcal{A}$ называется размерность ассоциированного линейного пространства V.

Способ построения отображения f в последней части доказательства может быть обобщен.

Теорема 2.7. *Пусть* $(\mathcal{A}, V)$ *и* $(\mathcal{A}', V')$ *— два аффинных пространства. Имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть* $f, g \in \operatorname{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ *— два аффинных отображения. Их линейные части совпадают в том и только в том случае, когда разность* $f(A) - g(A)$ *постоянна (и равна некоторому вектору* $v' \in V'$*).*

2. *Для любых двух точек* $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}'$ *и любого линейного отображения* $\psi \in l(V, V')$ *существует единственное аффинное отображение* $f \in \operatorname{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$, *для которого* $f(A) = A'$ *и* $\mathrm{d}\, f = \psi$.

Доказательство. 1. [$\Rightarrow$] Пусть $\mathrm{d}\, f = \mathrm{d}\, g$. Возьмем точку $A \in \mathcal{A}$. Тогда для любого вектора $v \in V$ имеем

$$f(A + v) = \mathrm{d}\, f(v) + f(A) = \mathrm{d}\, g(v) + f(A) = g(A + v) - g(A) + f(A),$$

поэтому $f(B) - g(B) = f(A) - g(A)$ для любой точки $B \in \mathcal{A}$ (в силу произвольности $v \in V$ и второй аксиомы афф.п.).

[$\Leftarrow$] Пусть $f(A) - g(A) = v'$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\mathrm{d}\, f(v) = f(A + v) - f(A) = \Big(g(A + v) + v'\Big) - \Big(g(A) + v'\Big) =$$

$$= g(A + v) - g(A) = \mathrm{d}\, g(v).$$

2. Определим отображение f так: $f(A + v) = \psi(v) + A'$. Ясно, что f аффинно. Единственность отображения следует из п. 1. □

Пример. Отображение $f \in \operatorname{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ называется *симметрией* относительно точки $A \in \mathcal{A}$, если $f(A) = A$ и $\mathrm{d}\, f(v) = -v$. Согласно п. 2 теоремы 2.7 симметрия определена однозначно. Покажите, что она задается формулой $f(B) = A + (A - B)$.

Лемма 2.8. *Пусть дано аффинное пространство $(\mathcal{A}, V)$ и точки A_0, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Для произвольного набора чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, сумма которых равна единице, точка*

$$\sum_{i=0}^{n} x_i A_i \triangleq A + \sum_{i=0}^{n} x_i (A_i - A)$$

не зависит от A (равенство $\triangleq$ определяет левую часть).

Доказательство. Прямая выкладка:

$$\Big(A + \sum_{i=0}^{n} x_i (A_i - A)\Big) - \Big(B + \sum_{i=0}^{n} x_i (A_i - B)\Big) = (A - B) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} x_i \Big((A_i - A) - (A_i - B)\Big) = (A - B) + \sum_{i=0}^{n} x_i (B - A) =$$

$$= (A - B) + (B - A) = \mathbf{0}, \quad \text{так как } \sum_{i=0}^{n} x_i = 1.$$

□

Определение 2.9. Точка

$$\sum_{i=0}^{n} x_i A_i$$

называется *барицентрической комбинацией* точек A_0, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ с коэффициентами $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Множество всех барицентрических комбинаций точек $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ называется *аффинной оболочкой* данного набора точек и обозначается $a\text{-}\operatorname{span}\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$. Одной формулой:

$$a\text{-}\operatorname{span}\{A_0, A_1, \ldots, A_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i A_i \;:\; x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}$$

Предложение 2.10. *Допустим, точки $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ таковы, что вектора $A_1 - A_0$, $A_2 - A_0, \ldots, A_n - A_0 \in V$ образуют базис пространства V. Любая точка $A \in \mathcal{A}$ однозначно представима в виде барицентрической комбинации точек $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ (при этом говорят, что данные точки задают барицентрическую систему координат в $\mathcal{A}$).*

Доказательство. Представим вектор $A - A_0 \in V$ в виде линейной комбинации векторов базиса (это делается однозначно — Предложение 1.9):

$$A - A_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i (A_i - A_0).$$

Положим $x_0 = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n$. Перенося A_0 в правую часть и представив нуль-вектор как $A_0 - A_0$, получим

$$A = A_0 + x_0(A_0 - A_0) + \sum_{i=1}^{n} x_i (A_i - A_0) = A_0 + \sum_{i=0}^{n} x_i (A_i - A_0) = \sum_{i=0}^{n} x_i A_i.$$

Таким образом, коэффициенты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ определены однозначно. $\square$

Предложение 2.11. *Пусть $(\mathcal{A}, V)$ и $(\mathcal{A}', V')$ — два аффинных пространства и $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.*

1. *Если $f \in \operatorname{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$, то*

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i f(A_i).$$

2. *Если $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ — барицентрическая система координат в $\mathcal{A}$, то для любых точек $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n \in \mathcal{A}'$ существует единственное отображение $f \in \operatorname{aff}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$, для которого $f(A_i) = A'_i$ при всех $i \in \overline{0, n}$.*

Доказательство. 1. Прямая выкладка:

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i A_i\right) - f(A_0) = \mathrm{d}\, f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i (A_i - A_0)\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i \,\mathrm{d}\, f(A_i - A_0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x_i \left(f(A_i) - f(A_0)\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i f(A_i) - f(A_0),$$

откуда следует искомое равенство.

2. Действительно, определим отображение $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ так:

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i A'_i.$$

Единственность этого отображения проверяется элементарно. $\square$

Определение 2.12. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$ — две точки, лежащие в аффинном пространстве $\mathcal{A}$. Множество точек вида

$$tA + (1-t)B, \quad t \in [0,1]$$

называется *отрезком* AB.

Говорят, что точка $C = tA + (1-t)B$ делит отрезок AB в отношении $\lambda = t/(1-t)$. Первый пункт предыдущего предложения означает, в частности, следующее. Если точка C делит отрезок AB в отношении λ, то при любом аффинном отображении $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ для которого $f(A) \neq f(B)$ точка $f(C)$ делит отрезок $f(A)f(B)$ в отношении λ.

Определение 2.13. Пусть $(\mathcal{A}, V)$ — аффинное пространство и U — линейное подпространство в в.п. V. Подмножество $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ называется *аффинным подпространством* с направляющим пространством U, если для любых двух точек $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ имеем $P_2 - P_1 \in U$ и $P_1 + u \in \mathcal{P}$ для любого вектора $u \in U$[1].

Размерностью аффинного подпространства называется размерность его направляющего пространства.

Ясно, что пара $(\mathcal{P}, U)$ из определения сама является аффинным пространством (с направляющим пространством в качестве ассоциированного).

Лемма 2.14. *Пусть $(\mathcal{A}, V)$ — аффинное пространство.*

1. *Если $\mathcal{P}$ — аффинное подпространство в $\mathcal{A}$ с направляющим пространством U, то для любой точки $P \in \mathcal{P}$ имеем*

   $$\mathcal{P} = \{P + u \,:\, u \in U\}.$$

   Обратно, для любой точки $A \in \mathcal{A}$ и для любого линейного подпространства $U \subset V$ множество

   $$\{A + u \,:\, u \in U\}$$

   является аффинное подпространством в $\mathcal{A}$ с направляющим пространством U.

2. *Любое аффинное подпространство $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ размерности k является аффинной оболочкой некоторых точек $P_0,\ P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{P}$. Обратно, аффинная оболочка произвольного множества точек из $\mathcal{A}$ является аффинным подпространством.*

[1] Запись $(\mathcal{P}, U) \subset (\mathcal{A}, V)$ будет означать, что $\mathcal{P}$ — аффинное подпространство пространства $\mathcal{A}$ с направляющим $U \subset V$

Доказательство. Элементарно. □

Предложение 2.15. *Пусть* $f : (\mathcal{A}, V) \to (\mathcal{A}', V')$ *— аффинное отображение и* $(\mathcal{P}, U) \subset (\mathcal{A}, V)$ *— аффинное подпространство в* $\mathcal{A}$.

Тогда множество $f(\mathcal{P})$ *является аффинным подпространством пространства* $\mathcal{A}'$ *с направляющим* $\mathrm{d}\, f(U) \subset V'$.

Доказательство. Согласно п. 2 предыдущей леммы, имеем

$$\mathcal{P} = a\text{-}\operatorname{span}\{P_0, \ldots, P_k\}$$

для некоторых точек $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{P}$ ($k = \dim \mathcal{P}$). Но по п. 1 предложения 2.11 это значит, что

$$f(\mathcal{P}) = a\text{-}\operatorname{span}\{f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_k)\}.$$

Согласно обратному утверждению п. 2 предыдущей леммы $f(\mathcal{P})$ — аффинное подпространство с направляющим

$$\begin{aligned} U' = \ & \operatorname{span}\{f(P_1) - f(P_0), \ldots, f(P_k) - f(P_0)\} = \\ & = \operatorname{span}\{\mathrm{d}\, f(P_1 - P_0), \ldots, \mathrm{d}\, f(P_k - P_0)\} = \\ & = \mathrm{d}\, f(\operatorname{span}\{P_1 - P_0, \ldots, P_k - P_0\}) = \mathrm{d}\, f(U). \end{aligned}$$

□

Пример. Любая точка является нульмерным аффинным пространством. Одномерное аффинное подпространство называется *прямой*, двумерное — *плоскостью*. Подробнее — следующий параграф.