§3 Прямая и плоскость. Векторные произведения

Вместо барицентрической системы координат[1], иногда удобнее использовать аффинную систему координат. Именно, набор, состоящий из точки $O \in \mathcal{A}$ (начала координат) и векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$, образующих базис пространства V, мы будем называть *аффинным базисом* в пространстве $\mathcal{A}$.

Определение 3.1. Пусть $O, e_1, \ldots, e_n$ — аффинный базис в $\mathcal{A}$. Координатами точки $A \in \mathcal{A}$ в этом базисе называются (определенные единственным образом) числа $t_1, \ldots, t_n$, для которых

$$A - O = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i.$$

При этом используется запись $A(O, t_1, \ldots, t_n)$, или просто $A(t_1, \ldots, t_n)$, если начало координат фиксировано.

Если $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ — барицентрическая система координат, то положив $O = A_0$ и $e_i = A_i - A_0$ для $i \in \overline{1, n}$ получим аффинный базис $O, e_1, \ldots, e_n$. Также легко получить формулы обратного перехода.

Прямая

Одномерное аффинное подпространство называется *прямой*.

Согласно лемме 3.14, прямая задается своей точкой $A \in \mathcal{A}$ и направляющим вектором $v \in V$ $(U = \mathrm{span}\{v\})$. Таким образом, любая точка прямой имеет вид

$$A(t) = A + tv, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Это равенство представляет из себя общую запись *параметрического уравнения прямой* (здесь *параметр* — это переменная $t \in \mathbb{R}$, вектор $v \in V$ называется *направляющим вектором*).

Случай $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$. Если O, e_1, e_2 — аффинный базис, то координаты точки $A(t)$ имеют вид

$$x = x_0 + tl, \quad y = y_0 + tm, \tag{2}$$

где $A(x_0, y_0)$ и $v = le_1 + me_2$. Уравнения (2) называют *параметрическими уравнениями прямой на плоскости*.

[1]) которая определяется выбором $n+1$ точки $A_0, \ldots, A_n$ аффинного пространства $(\mathcal{A}, V)$

Исключая из уравнений (2) параметр t получим равенство

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},$$

которое называется *каноническим уравнением прямой на плоскости.* Из канонического уравнения прямой на плоскости легко получить равносильное уравнение вида $Ax+By+C=0$, которое называется *общим уравнением прямой на плоскости.*

Случай $\mathcal{A}=\mathbb{R}^3$. Если O, e_1, e_2, e_3 — аффинный базис, то координаты точки $A(t)$ имеют вид

$$x=x_0+tl, \quad y=y_0+tm, \quad z=z_0+tk \tag{3}$$

где $A(x_0, y_0, z_0)$ и $v=le_1+me_2+ke_3$. Уравнения (3) называют *параметрическими уравнениями прямой в пространстве.*

Исключая из уравнений (3) параметр t получим равенства

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{k},$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве.*

Замечание. Канонические уравнения прямой имеют смысл и тогда, когда какой-либо из знаменателей обращается в ноль (но не все сразу). Например (3) задает прямую, проходящую через точку $A(x_0, y_0, z_0)$, и имеющую направляющим вектором вектор v.

Замечание. Канонические уравнения прямой имеют смысл и тогда, когда какой-либо из знаменателей обращается в ноль (но не все сразу). Например (3) задает прямую, проходящую через точку $A(x_0, y_0, z_0)$, и имеющую направляющим вектором вектор v.

Плоскость

Двумерное аффинное пространство называется *плоскостью.*

Согласно лемме 3.14, плоскость задается своей точкой $A \in \mathcal{A}$ и двумя направляющими векторами $v, v' \in V$ ($U=\mathrm{span}\{v, v'\}$). Таким образом, любая точка прямой имеет вид

$$A(t,p)=A+tv+pv', \quad t,p \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Это равенство представляет из себя общую запись *параметрического уравнения плоскости* (здесь *параметры* — это переменные $t, p \in \mathbb{R}$, вектора $v, v' \in V$ называются *направляющими векторами*).

Случай $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$. Если O, e_1, e_2, e_3 — аффинный базис, то координаты точки $A(t)$ имеют вид

$$x = x_0 + tl + pl', \quad y = y_0 + tm + pm', \quad z = z_0 + tk + pk' \tag{5}$$

где $A(x_0, y_0, z_0)$ и $v = le_1 + me_2 + ke_3$, $v' = l'e_1 + m'e_2 + k'e_3$. Уравнения (4) называют *параметрическими уравнениями плоскости в пространстве.*

Исключая из уравнений (4) параметры t и p получим равенство

$$(mk' - km')(x - x_0) + (kl' - lk')(y - y_0) + (lm' - ml')(z - z_0) = 0.$$

Уравнение полученного вида $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *общим уравнением плоскости в пространстве.*

Векторные произведения.

Смешанное произведение на плоскости

Уравнение прямой на аффинной плоскости (с фиксированным базисом) можно записать в виде

$$l(y - y_0) - m(x - x_0) = 0. \tag{6}$$

Здесь $v = le_1 + me_2$ — направляющий вектор и $A(x_0, y_0)$ — некоторая точка на прямой. Другими словами, точка с координатами (x, y) лежит на прямой в том и только том случае, когда имеет место равенство (6). Левая часть равенства (6) является функцией двух векторов — вектора $v \in \mathbb{R}^2$ и вектора $A - A_0 \in \mathbb{R}^2$.

Определение 3.2. Пусть $E = \{e_1, e_2\}$ — базис векторного пространства $V \simeq \mathbb{R}^2$. Отображение $\varphi_E : V \times V \to \mathbb{R}$, определенное формулой

$$\varphi_E(v, u) = v_1u_2 - v_2u_1, \tag{7}$$

где $v = v_1e_1 + v_2e_2$, $u = u_1e_1 + u_2e_2$, называется *смешанным произведением* векторов $v, u \in V$ в базисе E.

Заметим, что смешанное произведение зависит от выбора базиса (см. п. 4 следующего предложения). Уравнение (6) может быть записано с использованием введенного произведения векторов так:

$$\varphi_E(v, A - A_0) = 0.$$

Далее для смешанного произведения векторов используется более традиционное обозначение $[v, u]_E = \varphi_E(v, u)$.

Предложение 3.3. *Пусть $V \simeq \mathbb{R}^2$ — двумерное векторное пространство. Для любого базиса $E = \{e_1, e_2\}$ пространства V смешанное произведение обладает следующими свойствами.*

1. $[u, v]_E = -[v, u]_E \ \forall u, v \in V$

2. $[\lambda v + w, u]_E = \lambda [v, u]_E + [w, u]_E \ \forall u, v, w \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3. $[e_1, e_2]_E = 1$

4. *Для любого другого базиса $F = \{f_1, f_2\}$ пространства V имеет место равенство*

$$[v, u]_F = [e_1, e_2]_F \cdot [v, u]_E.$$

Доказательство. Доказательство свойств 1-3 элементарно и следует из явной формулы (7).

Доказательство четвертого свойства. Выразим вектора базиса E через вектора базиса F:

$$e_1 = af_1 + bf_2, \quad e_2 = cf_1 + df_2.$$

Пусть u_1 и u_2 — координаты вектора u в базисе E. Вычислим его координаты в базисе F:

$$u = u_1e_1 + u_2e_2 = u_1(af_1 + bf_2) + u_2(cf_1 + df_2) = (au_1 + cu_2)f_1 + (bu_1 + du_2)f_2.$$

Аналогично для вектора $v = v_1e_1 + v_2e_2$:

$$v = (av_1 + cv_2)f_1 + (bv_1 + dv_2)f_2.$$

Таким образом

$$[v, u]_F = (av_1 + cv_2)(bu_1 + du_2) - (au_1 + cu_2)(bv_1 + dv_2) =$$

$$= abv_1u_1 + adv_1du_2 + bcv_2u_1 + cdv_2u_2 - abu_1v_1 - adu_1v_2 - bcu_2v_1 - cdu_2v_2 =$$

$$= adv_1du_2 + bcv_2u_1 - adu_1v_2 - bcu_2v_1 = (ad - bc)(v_1u_2 - v_2u_1) = (ad - bc)[v, u]_E.$$

Нетрудно убедиться в том, что $[e_1, e_2]_F = ad - bc$. $\square$

Очевидные следствия. Если $[v,u]_E \neq 0$, то $[v,u]_F \neq 0$ для любого другого базиса F.

Вектора $v, u \in V$ линейно независимы (=образуют базис) в том и только в том случае, когда $[v,u]_E \neq 0$.

Предложение 3.4. *Для двух прямых на плоскости имеет место ровно одна из следующих возможностей.*

1. *Прямые совпадают.*

2. *Прямые не имеют общих точек (параллельны).*

3. *Прямые имеют ровно одну общую точку.*

Доказательство. Зададим прямые в параметрическом виде: $A_0 + vt$ и $B_0 + ut$ ($v, u \neq \vec{0}$). Общие точки этих прямых соответствуют решениям (относительно t) уравнения $[v, (B_0 + tu) - A_0]_E = 0$. Рассмотрим произведение $[u, v]_E$.

a) Пусть $[u,v]_E = 0$ в некотором базисе E (это условие не зависит от выбора базиса). В этом случае вектора v и u коллинеарны. Рассмотрим произведение $[A_0 - B_0, v]_E$.

a′) Если $[v, B_0 - A_0]_E = 0$, то для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$[v, (B_0 + tu) - A_0]_E = [v, B_0 - A_0]_E + t[v,u]_E = 0.$$

Поэтому любая точка второй прямой лежит на первой прямой, т.е. прямые совпадают.

b′) Если $[v, B_0 - A_0]_E \neq 0$, то для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$[v, (B_0 + tu) - A_0]_E = [v, B_0 - A_0]_E + t[v,u]_E \neq 0.$$

Поэтому прямые не имеют общих точек (параллельны).

b) Если $[u,v]_E \neq 0$, то уравнение

$$[v, (B_0 + tu) - A_0]_E = [v, B_0 - A_0]_E + t[v,u]_E = 0$$

имеет единственное решение $t = -[v, B_0 - A_0]_E / [v,u]_E$.

□

Определение 3.5. Говорят, что точки $A, B \in \mathcal{A}$ *лежат по разные стороны от прямой* на аффинной плоскости $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^2$, если отрезок AB имеет с прямой общую точку $C \neq A, B$.

Предложение 3.6. *Точки $A, B \in \mathcal{A}$ лежат по разные стороны от прямой $A_0 + vt$ на аффинной плоскости $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^2$ в том и только в том случае, если $[A - A_0, v]_E \cdot [B - A_0, v]_E < 0$ в некотором базисе E плоскости $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что знак произведения

$$[A - A_0, v]_E \cdot [B - A_0, v]_E$$

не зависит от выбора базиса (см. п. 4 предложения 3.3). Отрезок AB имеет с прямой общую точку $C \neq A, B$ если и только если существует число $\tau \in (0, 1)$ для которого уравнение

$$(1 - \tau)B + \tau A = A_0 + vt$$

имеет решение относительно t. Последнее равносильно тому, что вектора $B - A_0 + \tau(A - B)$ и v коллинеарны:

$$[(1 - \tau)(B - A_0) + \tau(A - A_0), v]_E = 0.$$

Преобразуем это равенство:

$$(1 - \tau)[B - A_0, v]_E + \tau[A - A_0, v]_E = 0.$$

Это равенство имеет место при некотором $\tau \in (0, 1)$ в том и только в том случае, если $[A - A_0, v]_E \cdot [B - A_0, v]_E < 0$. $\square$

Определение 3.7. Пусть $A, B, C \in \mathcal{A}$ — три точки на аффинной плоскости $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^2$. Множество точек вида $tA + \tau B + (1 - t - \tau)C$, для которых $t, \tau \in [0, 1]$, называется *треугольником* $\triangle ABC$. Число

$$\frac{1}{2}\left|[B - A, C - A]_E\right|$$

называется *площадью* треугольника $\triangle ABC$.

Корректность определения устанавливается простой проверкой:

$$[A - B, C - B]_E = [A - B, C - B + (B - A)]_E = -[B - A, C - A]_E,$$

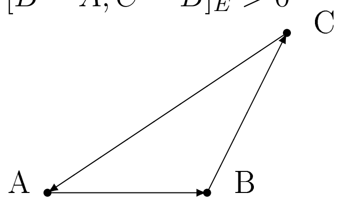
поэтому

$$\frac{1}{2}\left|[A - B, C - B]_E\right| = \frac{1}{2}\left|[B - A, C - A]_E\right|$$

Ориентация. Говорят, что два базиса $E = \{e_1, e_2\}$, $E' = \{e'_1, e'_2\}$ векторного пространства V одинаково ориентированы, если $[e'_1, e'_2]_E > 0$. Множество одинаково ориентированных базисов называется *ориентацией* векторного пространства V. Ясно, что имеется всего две ориентации (два базиса E и E' относятся к разным ориентациям $\Leftrightarrow$ $[e'_1, e'_2]_E < 0$).

Плоскость $\mathcal{A}$ называется *ориентированной*, если выбрана ориентация в ассоциированном векторном пространстве. Выбор ориентации аффинной плоскости равносилен выбору циклического порядка на вершинах невырожденного треугольника[2]. Действительно, пусть $\triangle ABC$ — невырожденный треугольник на плоскости, ориентированной классом базиса E векторного пространства V. Если $[B - A, C - B]_E > 0$, то порядок обхода вершин таков: $A \to B \to C$. Если $[B - A, C - B]_E < 0$, то порядок обхода вершин таков: $A \to C \to B$. Обратно, порядок вершин задает базис на плоскости (если порядок $A \to B \to C$, то ориентация задается базисом $\{B - A, C - B\}$).

Случай $[B - A, C - B]_E > 0$



Смешанное произведение в пространстве

Уравнение плоскости в трехмерном аффинном пространстве (с фиксированным базисом) можно записать в виде

$$(mk' - km')(x - x_0) + (kl' - lk')(y - y_0) + (lm' - ml')(z - z_0) = 0, \quad (8)$$

где $A(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая точка плоскости, и $v = le_1 + me_2 + ke_3$, $v' = l'e_1 + m'e_2 + k'e_3$ — направляющие вектора этой плоскости. Другими словами, точка $A(x, y, z)$ лежит на данной плоскости в том и только том случае, когда имеет место равенство (8). Левая часть равенства (8) является функцией трех векторов — векторов $v, v' \in \mathbb{R}^3$ и вектора $A - A_0 \in \mathbb{R}^3$.

Определение 3.8. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ — базис векторного пространства $V \simeq \mathbb{R}^3$. Отображение $\varphi_E : V \times V \times V \to \mathbb{R}$, определенное формулой

$$\varphi_E(v, u, w) = (v_2u_3 - v_3u_2)w_1 + (v_3u_1 - v_1u_3)w_2 + (v_1u_2 - v_2u_1)w_3, \quad (9)$$

[2] циклический порядок = направление обхода сторон треугольника

где

$$v = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i, \quad u = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^{3} w_i e_i,$$

называется *смешанным произведением* векторов $v, u, w \in V$ в базисе E.

Заметим, что смешанное произведение зависит от выбора базиса (см. п. 4 следующего предложения). Уравнение (8) может быть записано с использованием введенного произведения векторов так:

$$\varphi_E(v, v', A - A_0) = 0.$$

Далее для смешанного произведения векторов используется более традиционное обозначение $[v, u, w]_E = \varphi_E(v, u, w)$.

Предложение 3.9. *Пусть $V \simeq \mathbb{R}^3$ — трехмерное векторное пространство. Для любого базиса $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ пространства V смешанное произведение обладает следующими свойствами.*

1. $[u, v, w]_E = -[v, u, w]_E = [v, w, u]_E \ \forall u, v, w \in V$
2. $[\lambda v + w, u, z]_E = \lambda[v, u, z]_E + [w, u, z]_E \ \forall u, v, w, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $[e_1, e_2, e_3]_E = 1$
4. *Для любого другого базиса $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ пространства V имеет место равенство*

$$[v, u, w]_F = [e_1, e_2, e_3]_F \cdot [v, u, w]_E.$$

Доказательство. Доказательство свойств 1-3 элементарно и следует из явной формулы (9).

Доказательство четвертого свойства может быть напрямую (как доказательство п. 4 предложения 3.3). Здесь приводится другое доказательство.

Пусть

$$v = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i, \quad u = \sum_{j=1}^{3} u_j e_j, \quad w = \sum_{k=1}^{3} w_k e_k.$$

Тогда $[v, u, w]_F - [e_1, e_2, e_3]_F \cdot [v, u, w]_E =$

$$= \left[\sum_{i=1}^{3} v_i e_i, \sum_{j=1}^{3} u_j e_j, \sum_{k=1}^{3} w_k e_k\right]_F - [e_1, e_2, e_3]_F \cdot \left[\sum_{i=1}^{3} v_i e_i, \sum_{j=1}^{3} u_j e_j, \sum_{k=1}^{3} w_k e_k\right]_E =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} v_i u_j w_k \Big([e_i, e_j, e_k]_F - [e_1, e_2, e_3]_F \cdot [e_i, e_j, e_k]_E \Big).$$

Покажем, что $[e_i, e_j, e_k]_F = [e_1, e_2, e_3]_F \cdot [e_i, e_j, e_k]_E$ для всех $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Действительно, если среди индексов i, j, k есть повторы, то правая и левая часть данного равенство — нулевые (это следует из п. 1). Если же все индексы i, j, k различны, то искомое равенство следует из тождества $[e_1, e_2, e_3]_F = [e_1, e_2, e_3]_F \cdot [e_1, e_2, e_3]_E$. $\square$

Очевидные следствия. Если $[v, u, w]_E \neq 0$, то $[v, u, w]_F \neq 0$ для любого другого базиса F.

Вектора $v, u, w \in V$ линейно независимы (=образуют базис) в том и только в том случае, когда $[v, u, w]_E \neq 0$ для некоторого (произвольного) базиса E.

Определение 3.10. Говорят, что точки $A, B \in \mathcal{A}$ *лежат по разные стороны от плоскости* в аффинной пространстве $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^3$, если отрезок AB имеет с плоскостью общую точку $C \neq A, B$.

Предложение 3.11. *Точки $A, B \in \mathcal{A}$ лежат по разные стороны от плоскости $A_0 + vt + up$ в аффинном пространстве $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^3$ в том и только в том случае, если $[A - A_0, v, u]_E \cdot [B - A_0, v, u]_E < 0$ в некотором базисе E пространства $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.6. $\square$

Определение 3.12. Пусть $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ — четыре точки в аффинном пространстве $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^3$. Множество точек вида $tA + \tau B + pC + (1 - t - \tau - p)D$, для которых $t, \tau, p \in [0, 1]$, называется *тетраэдром* $\triangle ABCD$. Число

$$\frac{1}{6} \Big| [B - A, C - A, D - A]_E \Big|$$

называется *объемом* тетраэдра $\triangle ABCD$.

Корректность определения устанавливается простой проверкой:

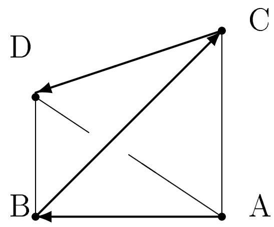
$$[A - B, C - B, D - B]_E = [A - B, C - B + (B - A), D - B + (B - A)]_E =$$
$$-[B - A, C - A, D - A]_E,$$

поэтому

$$\frac{1}{6} \Big| [A - B, C - B, D - B]_E \Big| = \frac{1}{6} \Big| [B - A, C - A, D - A]_E \Big|$$

Ориентация. Говорят, что два базиса $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ векторного пространства V одинаково ориентированы, если $[e'_1, e'_2, e'_3]_E > 0$. Множество одинаково ориентированных базисов называется *ориентацией* векторного пространства V. Ясно, что имеется всего две ориентации (два базиса E и E' относятся к разным ориентациям $\Leftrightarrow$ $[e'_1, e'_2, e'_3]_E < 0$).

Пространство $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^3$ называется *ориентированным*, если выбрана ориентация в ассоциированном векторном пространстве. Выбор ориентации аффинного пространства равносилен направления винтового движения в пространстве. Действительно, пусть $\triangle ABCD$ — невырожденный тетраэдр в пространстве, ориентированном классом базиса E векторного пространства V. Если $[B - A, C - B, D - C]_E > 0$, то винтовое движение таково: $A \to B \to C \to D$ (жирные стрелки на рисунке ниже).



Данное направление винтового движения в пространстве называется положительным. Оно соответствует движению штопора, который входит в пробку. Соответственно базис $\{B - A, C - A, D - A\}$ задает положительную ориентацию.

Отступление. О втором сопряженном пространстве.

Пусть V — векторное пространство и $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — некоторый базис в V. Напомню, что сопряженное пространство V^* векторным пространством линейных функций на V:

$$V^* = \{l : V \to \mathbb{R} \mid l(\lambda v + w) = \lambda l(v) + l(w)\ \forall v, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Предложение 3.13. *Набор векторов $E^* = \{e^*_1, \ldots, e^*_n\} \subset V^*$, определенный правилом*

$$e^*_i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

является базисом векторного пространства V^* (и называется сопряженным базисом).

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любой линейной функции $l \in V^*$ имеет место равенство

$$l = \sum_{i=1}^{n} l(e_i)e_i^*.$$

Ясно, что коэффициенты разложения вектора l определены единственным образом. По предложению 1.9 набор $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ является базисом в V^*. $\square$

Отсюда, в частности, следует изоморфизм $V \simeq V^*$. Однако не существует какого-либо избранного, инвариантного способа отождествить эти два векторных пространства. Однако, при переходе ко второму сопряженному $V^{**} = (V^*)^*$ такой способ появляется.

Предложение 3.14. *Существует естественный изоморфизм $\xi : V \to V^{**}$. Оно задается формулой $\xi(v)(l) = l(v)$ $\forall v \in V$, $\forall l \in V^*$.*

Доказательство. Нам надо показать, что ξ — изоморфизм. Пусть $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис пространства V, $E^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ — сопряженный базис в V^* и $E^{**} = \{e_1^{**}, \dots, e_n^{**}\}$ — сопряженный базис в V^{**}. Согласно определению отображения ξ, имеем $\xi(e_i)(e_j^*) = e_j^*(e_i)$, поэтому $\xi(e_i) = e_i^{**}$. Итак, отображение ξ переводит данный базис пространства V в некоторый базис пространства V^{**}, поэтому оно — изоморфизм. $\square$

Определение 3.15. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в.п. V. Вектор $l \in V^*$ для которого

$$l(w) = [v, u, w]_E, \quad \forall w \in V$$

называется *векторным произведением векторов* v и u в базисе E и обозначается $l = v \times_E u \in V^*$.

Из равенства (9) легко получить явную формулу для векторного произведения:

$$v \times_E u = (v_2u_3 - v_3u_2)e_1^* + (v_3u_1 - v_1u_3)e_2^* + (v_1u_2 - v_2u_1)e_3^*, \tag{10}$$

где $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, и $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$.

Предложение 3.16. *Пусть $V \simeq \mathbb{R}^3$ — трехмерное векторное пространство. Для любого базиса $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ пространства V векторное произведение обладает следующими свойствами.*

1. $u \times_E v = -v \times_E u$ $\forall u, v \in V$

2. $(\lambda v + w) \times_E u = \lambda(v \times_E u) + w \times_E u \ \forall u, v, w \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3. $e_1 \times_E e_2 = e_3^*$

4. *Для любого другого базиса* $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ *пространства* V *имеет место равенство*

$$v \times_F u = [e_1, e_2, e_3]_F \cdot v \times_E u.$$

Доказательство. Доказательство п.п. 1-3 получается с помощью явной формулы (10).

Доказательство п. 4:

$$v \times_F u(w) = [v, u, w]_F = [e_1, e_2, e_3]_F \cdot [v, u, w]_E = [e_1, e_2, e_3]_F \cdot v \times_E u(w).$$

В силу произвольности вектора $w \in V$ имеет место искомое равенство.□

Очевидное следствие. Равенство $v \times_E u = \vec{0}$ имеет место в том и только в том случае, когда вектора u и v коллинеарны.

Лемма 3.17. *Пусть* E *— базис пространства* V *и* E^* *— сопряженный базис пространства* V^**. Для любых векторов* $v, u \in V$ *и для любого вектора* $l \in V^*$ *имеет место равенство*

$$\Big[v, u, (v \times_E u) \times_{E^*} l\Big]_E = 0$$

(здесь использован канонический изоморфизм $V^{**} \simeq V$*).*

Доказательство. Доазательство представляет из себя прямую выкладку с использованием канонического изоморфизма $V^{**} \simeq V$:

$$\Big[v, u, (v \times_E u) \times_{E^*} l\Big]_E = v \times_E u\Big((v \times_E u) \times_{E^*} l\Big) =$$

$$= \Big((v \times_E u) \times_{E^*} l\Big)(v \times_E u) = \Big[v \times_E u, l, v \times_E u\Big]_{E^*} = 0.$$

□

Предложение 3.18. *Для двух плоскостей в трехмерном пространстве имеет место ровно один из следующих случаев.*

1. *Плоскости совпадают*

2. *Плоскости не имеют общих точек (параллельны)*

3. Плоскости пересекаются по общей прямой

Доказательство. Пусть плоскости заданы в параметрическом виде: $A_0 + vt + up$ и $B_0 + w\tau + z\mu$ (здесь параметрами являются $t, p, \tau, \mu \in \mathbb{R}$).

Рассмотрим вектор

$$n = (u \times_E v) \times_{E^*} (w \times_E z) \in V.$$

1) Предположим, что $n = \vec{0}$. Это означает, что вектора $u \times_E v$ и $w \times_E z$ коллинеарны: $u \times_E v = \lambda \cdot w \times_E z$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому имеем равносильность

$$[u, v, s]_E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [w, z, s]_E = 0.$$

Таким образом $\operatorname{span}\{u, v\} = \operatorname{span}\{w, z\}$, то есть направляющие пространства обеих плоскостей совпадают (продумайте этот момент).

Теперь посмотрим на произведение $[v, u, B_0 - A_0]_E$.

а) Если $[v, u, B_0 - A_0]_E = 0$, то $[v, u, B_0 + w\tau + z\mu - A_0]_E = [v, u, w\tau + z\mu]_E = 0$, поэтому любая точка второй плоскости лежит в первой плоскости. В силу того, что тогда и $[w, z, A_0 - B_0]_E = 0$, плоскости совпадают.

б) Если $[v, u, B_0 - A_0]_E \neq 0$, то $[v, u, B_0 + w\tau + z\mu - A_0]_E = [v, u, B_0 - A_0]_E \neq 0$, поэтому у плоскостей нет общих точек.

2) Пусть $n \neq \vec{0}$. По лемме 3.17 вектор n лежит в направляющем пространстве как одной, так и другой плоскости. При этом направляющие пространства плоскостей не совпадают. Вектор n не коллинеарен одному из векторов w, z (или обоим). Пусть $n \times_E w \neq 0$[3]. Рассмотрим прямую $B_0 + wt$, лежащую во второй плоскости. Точка

$$B_1 = B_0 + w \cdot \frac{[u, v, A_0 - B_0]_E}{[u, v, w]_E}$$

лежит на этой прямой и в первой плоскости:

$$[u, v, B_0 + w \cdot \frac{[u, v, A_0 - B_0]_E}{[u, v, w]_E} - A_0]_E = [u, v, B_0 - A_0]_E + [u, v, A_0 - B_0]_E = 0.$$

Таким образом уравнение искомой прямой: $B_1 + nt$.

□

[3]это значит, что вектора $\{v, u, w\}$ образуют базис, т.е. $[u, v, w]_E \neq 0$

Предложение 3.19. *Для прямой и плоскости в трехмерном пространстве имеет место ровно один из следующих случаев.*

1. *Прямая лежит в плоскости*

2. *Плоскость и прямая не имеют общих точек (параллельны)*

3. *Плоскость и прямая имеют ровно одну общую точку.*

Доказательство. Пусть плоскость и прямая заданы в параметрическом виде: $A_0+vt+up$ и $B_0+w\tau$ (здесь параметрами являются $t, p, \tau \in \mathbb{R}$). Общие точки соответствуют тем значениям параметра $\tau \in \mathbb{R}$ для которых

$$[v, u, B_0 + w\tau - A_0]_E = 0.$$

Рассмотрим смешанное произведение $[v, u, w]_E$ (E — некоторый базис).

1) Предположим, что $[v, u, w]_E = 0$.

Теперь посмотрим на произведение $[v, u, B_0 - A_0]_E$.

а) Если $[v, u, B_0 - A_0]_E = 0$, то $[v, u, B_0 + w\tau - A_0]_E = 0$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, поэтому любая точка прямой лежит в плоскости.

б) Если $[v, u, B_0 - A_0]_E \neq 0$, то $[v, u, B_0 + w\tau - A_0]_E = [v, u, B_0 - A_0]_E \neq 0$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, поэтому у плоскости и прямой нет общих точек.

2) Теперь пусть $[v, u, w]_E \neq 0$. Ясно, что уравнение

$$[v, u, B_0 + w\tau - A_0]_E = 0$$

имеет единственное решение

$$\tau = \frac{[v, u, A_0 - B_0]_E}{[v, u, w]_E},$$

соответствующее единственной общей точке для плоскости и прямой.

□