§4 Скалярное произведение

Определение 4.1. Пусть V — в.п. Функция $g : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *скалярным произведением* на V, если

1. $g(v, u + w) = g(v, u) + g(v, w)$ для всех $v, u, w \in V$
2. $\lambda g(v, u) = g(\lambda v, u) = g(v, \lambda u)$ для всех $v, u \in V$ и всех $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $g(v, u) = g(u, v)$ для всех $v, u \in V$
4. $g(v, v) > 0$ для всех $v \neq \mathbf{0}$

Вектора $v, u \in V$, для которых $g(v, u) = 0$ называются *ортогональными.* Число $|\,v|_g = \sqrt{g(v, v)}$ называется *длиной* вектора $v \in V$.

Лемма 4.2. *Для любых двух векторов $u, v \in V$ имеет место неравенство Коши-Буняковского*

$$|g(u, v)| \leq |\,v|_g \cdot |\,u|_g.$$

Доказательство. Согласно п. 4 определения, для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $|\,v + ut|_g^2 \geq 0$. Таким образом для любого $t \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$0 \leq |\,v + ut|_g^2 = |\,v|_g^2 + 2tg(v, u) + t^2|\,u|_g^2$$

(здесь мы воспользовались п.п. 1-3 определения). Полученный квадратичный трехчлен должен иметь неположительный дискриминант: $g^2(u, v) - |\,v|_g^2 \cdot |\,u|_g^2 \leq 0$. $\square$

Очевидные следствия. 1. Пользуясь доказанным неравенством можно определить угол (для скалярного произведения g) между векторами:

$$\cos(\widehat{uv}^g) = \frac{g(u, v)}{|\,v|_g \cdot |\,u|_g}.$$

2. Длина удовлетворяет неравенству треугольника:

$$|\,v + u|_g = \sqrt{|\,v|_g^2 + 2g(v, u) + |\,u|_g^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{|\,v|_g^2 + 2|\,v|_g \cdot |\,u|_g + |\,u|_g^2} = |\,v|_g + |\,u|_g.$$

3. Иногда полезно следующее тождество:

$$g(u, v) = \frac{1}{2}\Big(|\,u + v|_g^2 - |\,u|_g^2 - |\,v|_g^2\Big).$$

Определение 4.3. Пусть V, g и U, h — два в.п. с соответствующими скалярными произведениями. Отображение $\varphi : V \to U$ называется *изометрией*, если $g\,(u, v) = h(\varphi(v), \varphi(u))$ для всех $v, u \in V$ (равносильное условие $|\,v|_g = |\,\varphi(v)|_h$).

Очевидные следствия. 1. Легко видеть, что любая изометрия является линейным отображением. Действительно,

$$
\begin{gathered}
|\varphi(v+\lambda u) - \varphi(v) - \lambda\varphi(u)|_h^2 = |\varphi(v+\lambda u)|_h^2 + |\varphi(v)|_h^2 + \lambda^2|\varphi(u)|_h^2 - \\
- 2h(\varphi(v+\lambda u), \varphi(v)) - 2\lambda h(\varphi(v+\lambda u), \varphi(u)) + 2\lambda h(\varphi(v), \varphi(u)) = \\
= |v+\lambda u|_g^2 + |v|_g^2 + \lambda^2|u|_g^2 - 2g(v+\lambda u, v) - 2\lambda g(v+\lambda u, u) + 2\lambda g(v, u) = \\
= 2|v+\lambda u|_g^2 - 2(g(v+\lambda u, v) + \lambda g(v+\lambda u, u)) = 2|v+\lambda u|_g^2 - 2g(v+\lambda u, v+\lambda u) = 0.
\end{gathered}
$$

Но длина вектора равна нулю только если он нулевой, поэтому

$$\varphi(v+\lambda u) = \varphi(v) + \lambda\varphi(u).$$

2. Любая изометрия $\varphi : V \to U$ имеет тривиальное ядро: $\ker\varphi = \{0\}$. Действительно, если $\varphi(v) = 0$, то $v = 0$, так как $|\,v|_g = |\,\varphi(v)|_h$. Таким образом $\dim V = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi = \dim\operatorname{im}\varphi \le \dim U$. Любая изометрия является изоморфизмом, если $\dim V = \dim U$.

Пространства V, g и U, h называют *изометричными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \to U$, являющийся изометрией.

Лемма 4.4. *Любое конечномерное векторное пространство V со салярным произведением g обладает базисом, состоящим из ортогональных векторов единичной длины (ортонормированный базис).*

Доказательство. Доказательство состоит в так называемом *процессе ортогонализации Грама-Шмидта*. Именно, пусть $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ — какой-либо базис в пространстве V. Положим

$$f_1 = \frac{e_1}{|\,e_1|_g}, \quad f_2 = \frac{e_2 - g\,(f_1, e_2)f_1}{|\,e_2 - g\,(f_1, e_2)f_1|_g}.$$

Убедимся в том, что эти вектора ортогональны:

$$g\,(f_1, f_2) = g\,\left(f_1, \frac{e_2 - g\,(f_1, e_2)f_1}{|\,e_2 - g\,(f_1, e_2)f_1|_g}\right) = \frac{g\,(f_1, e_2) - g\,(f_1, e_2)|\,f_1|_g^2}{|\,e_2 - g\,(f_1, e_2)f_1|_g} = 0,$$

так как $|\,f_1|_g = 1$. Ясно, что и $|f_2|_g = 1$. Далее для любого $k \in \overline{3, n}$ положим

$$f_k = \frac{e_k - g\,(f_1, e_k)f_1 - g\,(f_2, e_k)f_2 - \ldots - g\,(f_{k-1}, e_k)f_{k-1}}{|e_k - g\,(f_1, e_k)f_1 - g\,(f_2, e_k)f_2 - \ldots - g\,(f_{k-1}, e_k)f_{k-1}|_g}.$$

Проверка того, что $g(f_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$, элементарна (проделайте ее). Легко видеть, что $|\,f_i|_g = 1$ для всех i. Таким образом вектора $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ образуют искомый ортонормированный базис. $\square$

Теорема 4.5. *Любое в.п. V размерности $n \in \mathbb{N}$ со скалярным произведением g изометрично пространству $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением*

$$(u, v) = |\,u| \cdot |\,v| \cdot \cos \widehat{uv}$$

(последнее пространство называется евклидовым).

Доказательство. Пусть $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — ортонормированный базис в V (он существует по лемме 4.4) и $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ (он задает декартову систему координат). Определим отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ следующим образом. Если $v = v_1 f_1 + \ldots + v_n f_n \in V$ — разложение вектора v по базису, то

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

Ясно, что $|\,v|_g = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} = |\,\varphi(v)|^2$ (теорема Пифагора). Таким образом φ — изометрия. $\square$

Далее, если не оговорено противное, мы считаем, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирован ортонормированный базис (в случае $n = 2, 3$ — положительно ориентированный). В таком базисе скалярное произведение векторов

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \quad \text{и} \quad u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$$

задается формулой

$$(v, u) = \frac{1}{2}\Big(|\,v + u|^2 - |\,v|^2 - |\,u|^2\Big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big((v_i + u_i)^2 - v_i^2 - u_i^2\Big) = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i.$$

Скалярное, как дополнительная структура на в.п., позволяет нам построить выделенный изоморфизм $V^* \to V$.

Лемма 4.6. *Для любой линейной функции $l \in V^*$ существует единственный вектор $u \in V$, для которого $l(v) = (u, v)$ при всех $v \in V$.*

Доказательство. Положим $u = l(e_1)e_1 + l(e_2)e_2 + \ldots + l(e_n)e_n$. Ясно, что это — искомый вектор. $\square$

Для пространств со скалярным произведением мы будем отождествлять V^* с V описанным выше способом.

Предложение 4.7. *Пусть V — ориентированное в.п.. При описанном изоморфизме $V^* \to V$ векторное произведение $v \times_E u$ соответствует вектору $w \in V$ для которого:*

1. $(w, u) = (w, v) = 0$ *(ортогональность)*

2. $|w| = |v| \cdot |u| \cdot |\sin(\widehat{vu})|$ *(=площадь параллелограмма, натянутого на вектора v и u)*

3. $[v, u, w] > 0$ *(правило буравчика)*

Доказательство. Сначала докажем корректность формулировки. А именно, покажем, что смешанное произведение (как в размерности 2, так и в размерности 3) одно и то же в любом ортонормированном базисе.

Далее, $[v, u, z] = v \times u(z) = (w, z)$, откуда следуют п.п. 1 и 3. Далее, $1 = [e_1, e_2, e_3] = (e_1 \times e_2, e_3) = |e_1 \times e_2| \cdot |e_3| = |e_1 \times e_2|$, поэтому скалярное произведение ортогональных векторов равно произведению их длин. Далее, $|w|^2 = [v, u, w] = [w, v, u] = (w \times v, u) = |w| \cdot |v| \cdot |u| \cos(\pi/2 - \widehat{vu})$. □

Предложение 4.8. $[u, v] = (u^\perp, v)$, *где* $[u^\perp, u] = |u|^2$.

Задачи. 1. Доказать тождество $(v \times u) \times w = (v, w)u - (u, w)v$ и получить из него *тождество Якоби*: $(v \times u) \times w + (w \times v) \times u + (u \times w) \times v = 0$.

2. Пусть $u, v \in \mathbb{R}^3$ — ортогональные вектора, а $w \in \mathbb{R}^3$ — вектор, не ортогональный вектору v. Найти вектор $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\begin{cases} (x, w) = m \\ x \times v = u \end{cases}.$$

Здесь $m \in \mathbb{R}$ — некоторое число.

До конца этого параграфа мы считаем, что на плоскости (в пространстве) фиксирована декартова система координат Oe_1e_2 ($Oe_1e_2e_3$). Мы будем придерживаться более традиционной для учебников геометрии формы записи. Так, вместо точки A аффинной плоскости (пространства) $(\mathcal{A}, V)$ мы будем использовать вектор $\vec{OA}$ с началом в точке O и концом в точке A.

Так, параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$r(t) = r_0 + vt \tag{1}$$

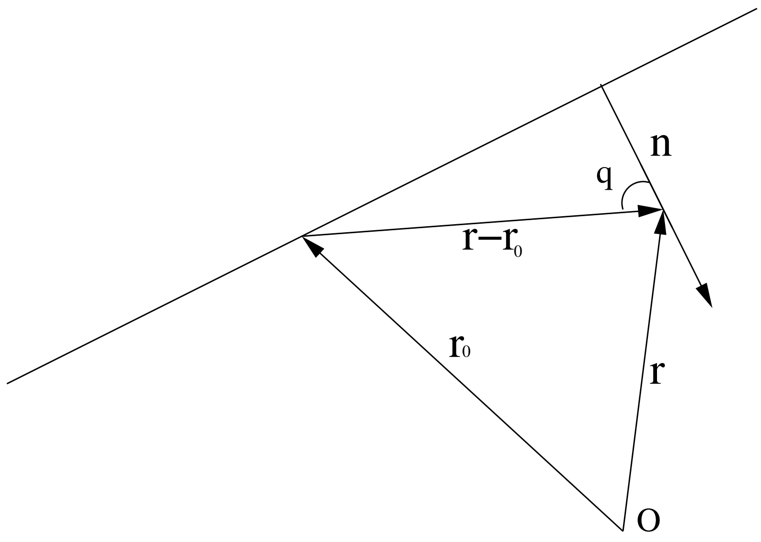

Рис. 1: Расстояние от точки $O + r$ до прямой равно $|r - r_0| \cos q$

Расстояние от точки до прямой. Любой вектор, ортогональный направляющему вектору $v \in V$ прямой на плоскости, называется *вектором нормали* данной прямой. Пусть $n \in V$ — такой вектор. Очевидно, что уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$(n, r - r_0) = 0. \tag{2}$$

Смысл этого уравнения: точка $O + r \in \mathcal{A}$ лежит на данной прямой в том и только в том случае, когда имеет место равенство (2).

Пусть q — угол между векторами n и $r - r_0$, тогда

$$(n, r - r_0) = |n| \cdot |r - r_0| \cdot \cos q.$$

Но модуль числа $|r - r_0| \cdot \cos q$ равен расстоянию между точкой $O + r$ и данной прямой. Таким образом расстояние между точкой $O + r$ и данной прямой равно

$$\frac{|(n, r - r_0)|}{|n|}.$$

Нормальное уравнение прямой. Если $n/|n| = e_1 \cdot \cos p + e_2 \cdot \sin p$, $r = e_1 \cdot x + e_2 \cdot y$, то уравнение (2) можно записать в виде

$$x \cos p + y \sin p - d = 0.$$

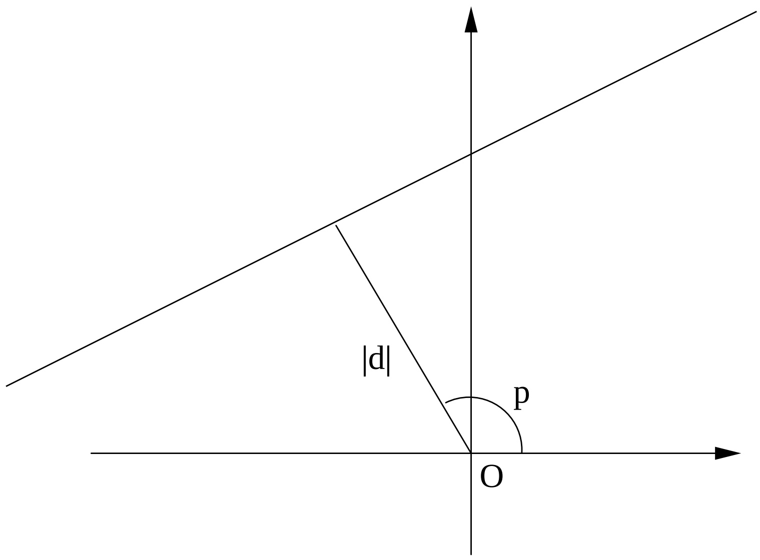

Рис. 2: К нормальному уравнению прямой.

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой.* При этом расстояние от прямой до начала координат равно $|\,d|$.

Уравнение плоскости в пространстве. Любой ненулевой вектор, ортогональный направляющему подпространству плоскости, называется ее нормалью. Если плоскость в трехмерном пространстве задана параметрическим уравнением $r(t,\tau) = r_0 + tv + \tau u$, то любая нормаль к плоскости пропорциональна вектору $v \times u$. Таким образом уравнение плоскости $[v, u, r - r_0] = 0$ может быть записано в виде

$$(n, r - r_0) = 0, \tag{3}$$

где n — любой вектор нормали к данной плоскости.

Для расстояния между точкой $O{+}r$ и данной плоскостью имеет место формула

$$\frac{|\,(n, r - r_0)|}{|\,n|},$$

аналогичная формуле для расстояния от точки до плоскости.

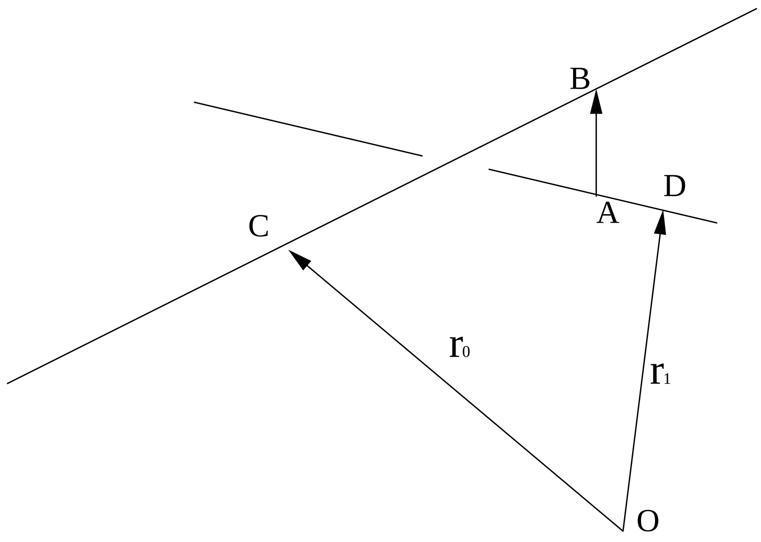

Рис. 3: Расстояние между двумя прямыми.

Расстояние до прямой в пространстве. Пусть $r(t) = r_0 + vt$ — параметрическое уравнение прямой в пространстве. Для произвольного вектора r расстояние между точкой $O + r$ и прямой равно модулю числа $|\, r - r_0| \sin(\widehat{v, r - r_0})$, т.е. отношению $|\, v \times (r - r_0)|/|\, v|$.

Расстояние между двумя прямыми. Пусть $r_0 + vt$, $r_1 + ut$ — две прямые не параллельные в пространстве, заданные параметрически. Они имеют единственный общий перпендикуляр AB (см. рис. 3). Действительно, вектора $\{v, u, v \times u\}$ образуют базис. Представим $r_0 - r_1$ в виде линейной комбинации: $r_1 - r_0 = av + bu + c(v \times u)$. Это равенство может быть записано в виде $r_0 + av - c(v \times u) = r_1 + bu$. Положим $A = O + r_1 + bu$ и $B = O + r_0 + av$. Точка A лежит на второй прямой, а точка B — на первой. Вектор $AB = B - A = c(v \times u)$ перпендикулярен обеим прямым. Из равенства $r_1 - r_0 = av + bu + AB$ следует, что

$$[r_1 - r_0, v, u] = [AB, v, u] = (v \times u, AB) = \pm |v \times u| \cdot |AB|$$

(вектора $v \times u$ и AB коллинеарны). Таким образом расстояние между прямыми равно

$$|AB| = \frac{\Big| [r_1 - r_0, v, u] \Big|}{|\, v \times u|}.$$