§5 Структура симметрических операторов в размерностях 2 и 3. Классификация квадрик.

Определение 5.1. Пусть V — в.п. Линейное отображение $A \in l(V, V)$ называется *линейным оператором в* V. Для краткости будем писать $l(V)$ вместо $l(V, V)$.

Произведением линейных операторов $A, B \in l(V)$ называется линейный оператор $C \in l(V)$, действующий по правилу $Cv = A(Bv)$.

Тождественный оператор $I \in l(V)$ определяется формулой $Iv = v$ для всех $v \in V$. *Нулевой оператор* $O \in l(V)$ определяется формулой $Ov = \mathbf{0}$ для всех $v \in V$.

Примеры. Поворот на $\pi/2$ против часовой стрелки $J \in l(\mathbb{R}^2)$ является линейным оператором. Очевидно, что $J^2 = -I$, $J^4 = I$. Отметим формулу

$$[v, u] = (Jv, u) = -(v, Ju). \tag{1}$$

Задача с нормалями.

Пусть $J_{12} \in \mathbb{R}^3$ — поворот на $\pi/2$ в плоскости OXY и $J_{23} \in \mathbb{R}^3$ — поворот на $\pi/2$ в плоскости OYZ. Если e_3 — единичный вектор стандартного базиса, направленный вдоль оси OZ, то $J_{12}e_3 = e_3$, $J_{23}e_3 = -e_2$, $J_{12}e_2 = -e_1$. Поэтому $J_{12}J_{23}e_3 = e_1$, но $J_{23}J_{12}e_3 = -e_2$. Таким образом не всегда имеет место равенство $AB = BA$ (умножение операторов некоммутативно).

Пусть $V = C^\infty[0, 1]$ — пространство гладких функций на отрезке $[0, 1]$. Оператор $A \in l(V)$, действующий как $Af(x) = f'(x)$ является, очевидно, линейным оператором (оператор дифференцирования).

Определение 5.2. Подпространство U векторного пространства V называется *собственным (или инвариантным) подпространством* для оператора $A \in l(V)$, если $A(U) \subset U$.

Ненулевой вектор $v \in V$, для которого $Av = \lambda v$ называется *собственным вектором* (собственный вектор порождает одномерное собственное подпространство). При этом число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *собственным числом.*

Предложение 5.3. *Пусть V — в.п. и $A \in l(V)$. A обратим $\Leftrightarrow$ A не имеет нулевого собственного значения.*

Доказательство. Заметим, что по теореме 1.13

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim V.$$

Таким образом биективность (а значит и обратимость) оператора A равносильна тому, что $\ker A = \{\mathbf{0}\}$.

A обратим $\Leftrightarrow \ker A = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$ для любого ненулевого вектора $v \in V$ имеем $Av \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ не является собственным значением для A. $\square$

Лемма 5.4. *Пусть $v, u \in V$ — линейно независимые вектора в пространстве $V \simeq \mathbb{R}^2$. Если $A \in l(V)$, то число*

$$\frac{[Av, Au]_E}{[v, u]_E}$$

зависит только от оператора A.

Доказательство. Пусть F — базис, отличный от базиса $E = \{e_1, e_2\}$. Согласно п.4 предложения 3.3 имеем

$$\frac{[Av, Au]_F}{[v, u]_F} = \frac{[e_1, e_2]_F \cdot [Av, Au]_E}{[e_1, e_2]_F \cdot [v, u]_E} = \frac{[Av, Au]_E}{[v, u]_E}.$$

Таким образом данное число не зависит от базиса, в котором вычисляется смешанное произведение.

Возьмем другую пару линейно независимых векторов $\{z, w\} \subset V$. Один из этих векторов не коллинеарен вектору v. Пусть $w = av + bu$, $b \neq 0$, тогда

$$\frac{[Av, Aw]}{[v, w]} = \frac{[Av, A(av + bu)]}{[v, av + bu]} = \frac{a \cdot [Av, Av] + b \cdot [Av, Au]}{a \cdot [v, v] + b \cdot [v, u]} = \frac{[Av, Au]}{[v, u]}.$$

Но вектор $z \in V$ можно выразить через пару неколлинеарных векторов $v, w \in V$: $z = cv + dw$, при этом $c \neq 0$, так как z и w не коллинеарны. Таким образом

$$\frac{[Az, Aw]}{[z, w]} = \frac{[A(cv + zw), Aw]}{[cv + zw, w]} = \frac{c \cdot [Av, Aw] + d \cdot [Aw, Aw]}{c \cdot [v, w] + d \cdot [w, w]} = \frac{[Av, Aw]}{[v, w]}.$$

Из двух полученных равенств следует, что

$$\frac{[Az, Aw]}{[z, w]} = \frac{[Av, Au]}{[v, u]}.$$

Таким образом число $[Av, Au]_E / [v, u]_E$ не зависит ни от базиса E, ни от пары линейно независимых векторов $\{v, u\} \subset V$.$\square$

Лемма 5.4.1 *Пусть $v, u, w \in V$ — линейно независимые вектора в пространстве $V \simeq \mathbb{R}^3$. Если $A \in l(V)$, то число*

$$\frac{[Av, Au, Aw]_E}{[v, u, w]_E}$$

не зависит ни от базиса E, ни от выбора линейно независимых векторов $v, u, w \in V$.

Доказательство. Независимость от выбора базиса проверяется также, как в предыдущем доказательстве (только используется п.4 предложения 3.9).

Возьмем другую тройку $v', u', w' \in V$ линейно независимых векторов. Один из них не компланарен векторам $v, u \in V$. Пусть $w' = av + bu + cw$, $c \neq 0$, тогда

$$\frac{[Av, Au, Aw']}{[v, u, w']} = \frac{[Av, Au, A(av + bu + cw)]}{[v, u, av + bu + cw]} =$$
$$= \frac{[Av, Au, aAv + bAu] + c[Av, Au, Aw]}{[v, u, av + bu] + c[v, u, w]} = \frac{[Av, Au, Aw]}{[v, u, w]}.$$

Либо вектор v', либо вектор u' не компланарен с парой векторов $\{v, w'\}$. Пусть $u' = dv + eu + fw'$, $e \neq 0$. Аналогично предыдущей выкладке получим

$$\frac{[Av, Au', Aw']}{[v, u', w']} = \frac{[Av, Au, Aw']}{[v, u, w']}.$$

Оставшийся вектор $v' \in V$ не коллинеарен векторам $u', w' \in V$: $v' = jv + hu' + kw'$, $j \neq 0$, поэтому получим

$$\frac{[Av', Au', Aw']}{[v', u', w']} = \frac{[Av, Au', Aw']}{[v, u', w']}.$$

Таким образом число $[Av, Au, Aw]_E/[v, u, w]_E$ не зависит ни от базиса E, ни от тройки линейно независимых векторов $\{v, u, w\} \subset V$. $\Box$

Определение 5.5. Число, определенное в предыдущих двух леммах называется *определителем* оператора $A \in l(V)$ и обозначается $\det A$.

Очевидные свойства. $\det O = 0$, $\det I = 1$.

Пример. Отражение относительно прямой OX. Линейный оператор $R_{OX} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ отражения оставляет ось OX на месте: $R_{OX}e_1 = e_1$, и отражает ортогональные вектора: $R_{OX}e_2 = -e_2$. Несложное вычисление показывает, что $\det R_{OX} = -1$.

Предложение 5.6. *Линейный оператор* A *в* $V \simeq \mathbb{R}^{2,3}$ *обратим в том и только в том случае, когда* $\det A \neq 0$.

Доказательство. Пусть вектора $v, u, w \in V$ линейно независимы. Имеем цепочку равносильных утверждений: $[Av, Au, Aw] = 0 \Leftrightarrow$ вектора $Av, Au, Av \in V$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ найдутся числа $a, b, c \in \mathbb{R}$, не равные нулю одновременно, для которых $a \cdot Av + b \cdot Au + c \cdot Aw = 0 \Leftrightarrow A(av + bu + cw) = \mathbf{0} \Leftrightarrow av + bu + cw \in \ker A$, т.е. $\ker A \neq \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$ оператор A не обратим.

Таким образом $\det A = 0 \Leftrightarrow$ оператор A не обратим. Что равносильно утверждению предложения. $\square$

Определение 5.7. Функция $P_A(t) = \det(A - tI)$ называется *характеристическим многочленом* оператора A.

Предложение 5.8. *1.* $\lambda \in \mathbb{R}$ *— с.з. оператора* $A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.

2. $\lambda \in \mathbb{R}$ *— не с.з. оператора* $A \Leftrightarrow$ *оператор* $A - \lambda I$ *обратим.*

Доказательство. 1. Число $\lambda \in \mathbb{R}$ — с.з. оператора $A \Leftrightarrow$ (по определению) существует ненулевой вектор $v \in V$, для которого $Av = \lambda v$, т.е. $(A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(A - \lambda I)$, т.е. оператор $A - \lambda I$ имеет ненулевое ядро $\Leftrightarrow$ (по предложению 5.6) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.

2. Число $\lambda \in \mathbb{R}$ — не с.з. оператора $A \Leftrightarrow$ (по п. 1) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \neq 0 \Leftrightarrow$ (по предложению 5.6) оператор $A - \lambda I$ обратим. $\square$

Определение 5.9. Пусть V — в.п. со скалярным произведением $(\, , \,)$. Оператор $A \in l(V)$ называется *симметрическим*, если $(Av, u) = (Au, v)$ при всех $v, u \in V$.

Лемма 5.10. *Если* v *и* u *— два собственных вектора симметрического л.о.* A *и соответствующие собственные числа различны, то* $v \perp u$.

Доказательство. Пусть $Av = \lambda v$ и $Au = \mu u$. Согласно симметричности оператора A имеем $(Av, u) = (Au, v)$, поэтому

$$0 = (Av, u) - (Au, v) = \lambda(v, u) - \mu(u, v) = (\lambda - \mu)(v, u).$$

Если $\lambda \neq \mu$, то $(v, u) = 0$. $\square$

Теорема 5.11. *Пусть* $V \simeq \mathbb{R}^2$ *и* $A \in l(V)$ *— симм. л.о. Существует пара ортогональных собственных векторов* $v, u \in V$ *для* A*:* $Av = \lambda v$, $Au = \mu u$*. Причем, если* $\lambda \neq \mu$*, то выбор пары векторов однозначен.*

Доказательство. Заметим, что вектор $v \in V$ является собственным вектором оператора A если и только если $[Av, v] = 0$.

Пусть $e_1, e_2 \in V$ — ортонормированный базис на плоскости. Возьмем вектор $v_t = e_1 \cos t + e_2 \sin t$ и посмотрим на функцию $f(t) = [Av_t, v_t]$. Вычислим значения этой функции в точках $t = 0$ и $t = \pi/2$:

$$f(0) = [Ae_1, e_1] = -(Ae_1, Je_1) = -(Ae_1, e_2),$$

$$f(\pi/2) = [Ae_2, e_2] = -(Ae_2, Je_2) = (Ae_2, e_1).$$

Если $(Ae_1, e_2) = 0$, то вектора $v_0 = e_1$, $v_{\pi/2} = e_2$ являются искомыми собственными векторами.

Пусть $(Ae_1, e_2) \neq 0$. Функция $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ непрерывна:

$$f(t) = [Av_t, v_t] = \cos^2 t[Ae_1, e_1] + \cos t \cdot \sin t([Ae_1, e_2] + [Ae_2, e_1]) + \sin^2 t[Ae_2, e_2]$$

и принимает на концах отрезка $[0, \pi/2]$ противоположные значения. По теореме Больцано-Коши найдется такая точка $t^* \in (0, \pi/2)$, для которой $f(t^*) = 0$. Пусть $v = v_{t^*}$. Так-как $f(t^*) = [Av, v] = 0$ вектор $v \in V$, лежащий в первом квадранте, является собственным для оператора A: $Av = \lambda v$.

Рассмотрев ту же функцию на отрезке $[\pi/2, \pi]$, обнаружим второй собственный вектор $u \in V$: $Au = \mu u$, лежащий во втором квадранте. Если $\lambda \neq \mu$, то, согласно лемме 5.10, вектора v и u ортогональны. Если $\lambda = \mu$, то любой вектор является собственным для A.

Однозначность выбора собственных векторов при $\lambda \neq \mu$. В этом случае по лемме 5.10 любой собственный вектор ортогонален либо v, либо u. $\square$

Лемма 5.12. *Пусть $A \in V \simeq \mathbb{R}^3$ — л.о. (не обязательно симмметрический). Тогда A имеет нетривиальное собственное подпространство.*

Доказательство. Возьмем два единичных вектора $v, u \in V$ и рассмотрим вектор $v_t = \cos t \cdot v + \sin t \cdot u$. Образуем функцию

$$f(t) = [A^2 v_t, Av_t, v_t].$$

Ясно, что эта функция $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ непрерывна и что $f(0) = -f(\pi)$. Согласно теореме Больцано-Коши найдется такое число $t^* \in [0, \pi]$, что $f(t^*) = 0$. Пусть $w = v_{t^*}$, т.е. $[A^2 w, Aw, w] = 0$.

Если $Aw = \lambda w$, то вектор $w \in V$ порождает собственное подпространство и дальше доказывать нечего. Пусть вектора Aw и w линейно независимы и $U = \mathrm{span}\{w, Aw\}$. Покажем, что U — A-инвариантное подпространство. Возьмем вектор $z \in U$ и представим его в виде линейной комбинации $z = a \cdot w + b \cdot Aw$ векторов w и Aw. В этом случае

$$Az = A(a \cdot w + b \cdot Aw) = a \cdot Aw + b \cdot A^2 w.$$

Но в силу того, что $[A^2 w, Aw, w] = 0$, вектор $A^2 w$ лежит в подпространстве U, поэтому $Az \in U$. Таким образом $A(U) \subset U$, поэтому подпространство U является искомым инвариантным подпространством.□

Теорема 5.13. *Пусть $V \simeq \mathbb{R}^3$ и $A \in l(V)$ симм. л.о. Существует тройка ортогональных собственных векторов $v, u, w \in V$ для A. Причем, если все собственные числа различны, то выбор тройки векторов однозначен.*

Доказательство. Согласно предыдущей лемме, оператор A имеет инвариантное подпространство $U \subset V$.

1. **Подпространство U одномерно.** Пусть $U = \mathrm{span}\{v\}$ и $Av = \lambda v$. Если вектор $u \in V$ перпендикулярен вектору $v \in V$, то $(Au, v) = (u, Av) = \lambda(u, v) = 0$. Таким образом подпространство $U' \subset V$, ортогональное вектору v — собственное для A, т.е. $A(U') \subset U'$.

Пусть $A' : U' \to U'$ — ограничение оператора A на инвариантное подпространство $U' \simeq \mathbb{R}^2$. Согласно теореме 5.11, имеются собственные вектора $u, w \in U'$ для оператора A'. Таким образом тройка ортогональных (по лемме 5.10) векторов $\{v, u, w\}$ является искомой.

2. **Подпространство U двумерно.** Согласно теореме 5.11, имеются собственные вектора $u, w \in U$ для ограничения оператора A на подпространство U. Но эти вектора собственные и для A. Положим $v = u \times w$, тогда $(Av, u) = (v, Au) = (u, w, Au) = 0$ поэтому $Av \perp u$. Аналогично $Av \perp w$. Таким образом вектор Av ортогонален векторам u и w, поэтому $Av = \lambda u \times w = \lambda v$. Таким образом тройка ортогональных (по лемме 5.10) векторов $\{v, u, w\}$ является искомой.

В случае различных собственных значений, любой другой собственный вектор пропорционален одному из найденных трех векторов.□

Подитожим результаты данного параграфа. Для любого симметрического оператора $A \in l(\mathbb{R}^n)$ $(n = 2, 3)$ найдется ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, состоящий из собственных векторов для A: $Ae_i = \lambda_i e_i$. Таким образом для любого вектора $v \in V$ имеем

$$Av = A\left(\sum_{i=1}^n (v, e_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^n (v, e_i) A e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (v, e_i) e_i.$$

Пусть $(\mathcal{A}, V)$ — аффинное пространство. Напомню, что функция $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называется *аффинно-линейной*, если она имеет вид $f(A+v) = f(A) + df(v)$. Здесь $df : V \to \mathbb{R}$ — линейное отображение (дифференциал функции), не зависящее от точки $A \in \mathcal{A}$. Пусть $V \simeq \mathbb{R}^n$. Фиксируем на V некоторое скалярное произведение. В пространстве со скалярным произведением любое линейное отображение $V \to \mathbb{R}$ имеет вид $v \mapsto (w, v)$ (лемма 4.6), поэтому

$$f(A+v) = (w, v) + f(A),$$

где вектор $w \in V$ не зависит от точки $A \in \mathcal{A}$.

Определение 5.14. Скажем, что функция $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *аффинно-квадратична*, если найдутся (ненулевой) линейный оператор $F \in l(V)$, вектор $b \in V$ и число $c \in \mathbb{R}$, что

$$\forall A \in \mathcal{A}\,,\ \forall v \in V \qquad f(A+v) = (Fv, v) + 2(b, v) + f(A),$$

для некоторого скалярного произведения $(\ ,\ )$ на $V \simeq \mathbb{R}^n$.

Замечания. 1. Заметим, что данное определение не зависит от выбора скалярного произведения. Действительно, рассмотрим функцию $a(v, u) = (Fv, u)$. Эта функция линейна по каждому из аргументов. В частности, если $(\ ,\ )_1$ — другое скалярное произведение на V, то $a(v, u) = (F_1(v), u)_1$ для некоторой функции $F_1 : V \to V$. Но $(F_1(v + \lambda v'), u)_1 = a(v + \lambda v', u) = a(v, u) + \lambda a(v', u) = (F_1(v), u)_1 + (\lambda F_1(v'), u)_1 = (F_1(v) + \lambda F_1(v'), u)_1$ для любых векторов $v, v', u \in V$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому $F_1 \in l(V)$. Аналогично имеем $(b, v) = (b_1, v)_1$ для некоторого числа $b_1 \in \mathbb{R}$.

2. Оператор $F \in l(V)$ может быть выбран симметрическим. Действительно, рассмотрим функцию $a(v, u) = ((Fv, u) + (Fu, v))/2$. В силу линейности функции a по обоим аргументам найдется линейный оператор $\widetilde{F} \in l(V)$ для которого $a(v, u) = (\widetilde{F}v, u)$. В силу того, что $a(v, u) = a(u, v)$ этот оператор симметричен. Остается заметить, что $(\widetilde{F}v, v) = (Fv, v)$ для любого вектора $v \in V$.

Определение 5.15. Пусть $(\mathcal{A}, V)$ — аффинное пространство и $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ аффинно-квадратичная функция. Множество точек

$$Q(f) = \{B \in \mathcal{A} \mid f(B) = 0\}$$

называется *квадрикой* в $\mathcal{A}$.

Замечания. 1. Фиксируем точку $O \in \mathcal{A}$ и пусть $f(O) = c$. Точка $O+v$ принадлежит квадрике $Q(f)$ в том и только в том случае, когда

$$(Fv, v) + 2(b, v) + c = 0. \tag{2}$$

Это уравнение называется *уравнением квадрики* $Q(f)$.

2. Может случится так, что $Q(f) = \emptyset$. Пример: $F = I$, $c = 1$. Ясно, что нет такого вектора $v \in V$ для которого $|\,v|^2 + 1 = 0$.

3. Пример непустой квадрики: $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^n$, $F = I$, $c = -R^2$. Это — окружность радиуса R с центром в O.

4. Любая прямая $(n, r - r_0) = 0$ на плоскости может быть получена как квадрика: $f(B) = (n, B - B_0)^2$ (здесь B_0 — произвольная точка на прямой).

Последний случай заслуживает особого определения.

Определение 5.16. Квадрика в аффинном пространстве $\mathcal{A}$ называется *сильно вырожденной*, если она целиком лежит в некотором аффинном подпространстве $\mathcal{B}$ меньшей размерности ($\dim \mathcal{B} < \dim \mathcal{A}$).

Определение 5.17. Точка $A \in \mathcal{A}$ называется *центром* квадрики $Q(f)$, если вместе с любой своей точкой $B \in Q(f)$ квадрика содержит и точку $B + 2(A - B)$.

Квадрика, имеющая хотя бы один центр, называется *центральной*.

Лемма 5.18. *Пусть квадрика $Q(f)$ задана уравнением (2). Если вектор $b \in V$ принадлежит образу оператора F, то квадрика $Q(f)$ является центральной. Обратно, если квадрика $Q(f)$ не сильно вырождена и центральна, то вектор $b \in V$ принадлежит образу оператора F.*

Доказательство. Сначала докажем обратное. Пусть $O + v^*$ — центр квадрики $Q(f)$ и точка $O + v$ лежит на последней: $f(O + v) = 0$. Тогда $f(O + v + 2(O + v^* - O - v)) = f(O + 2v^* - v) = 0$, т.е.

$$\begin{aligned}
0 = (F(2v^* - v), (2v^* - v)) + 2(b, 2v^* - v) + c = \\
= 4(Fv^*, v^*) - 4(Fv^*, v) + (Fv, v) + 4(b, v^*) - 2(b, v) + c = \\
= 4\Big((Fv^*, v^*) - (Fv^*, v) + (b, v^*) - (b, v)\Big) = 4(Fv^* + b, v^* - v).
\end{aligned}$$

Здесь использовано равенство (1).

Пусть $\dim V = n$. Требование не сильной вырожденности эквивалентно тому, что на квадрике найдутся точки $O + v_0, \dots, O + v_n$ для которых вектора $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ образуют базис в V.

По доказанному выше имеет место $n+1$ равенство $(Fv^*+b, v^*-v_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$. Вычитая равенство $(Fv^* + b, v^* - v_0) = 0$ из остальных, получим n равенств

$$(Fv^* + b, v_1 - v_0) = 0, \quad \ldots \quad , (Fv^* + b, v_n - v_0) = 0.$$

Это означает, что проекции вектора $Fv^* + b$ на все вектора некоторого базиса — нулевые. Значит и $Fv^* + b = \mathbf{0}$. Последнее равносильно тому, что $b = F(-v^*)$.

Теперь докажем прямое утверждение. Пусть $b \in \operatorname{im} F$, тогда найдется такой вектор $v^* \in V$, для которого $F(-v^*) = b$. Элементарная проверка показывает, что точка $O + v^*$ является центром квадрики $Q(f)$. □

Лемма 5.19. *Пусть $Q(f)$ — квадрика в аффинном пространстве $(\mathcal{A}, V)$. Найдутся такая точка $O \in \mathcal{A}$ и ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в $V \simeq \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, что уравнение квадрики имеет следующий вид.*

При $n = 2$.

1. $\lambda_1(v, e_1)^2 + \lambda_2(v, e_2)^2 + c = 0$, *где* $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$
2. $\lambda_2(v, e_2)^2 + 2q(v, e_1) = 0$, *где* $|\lambda_2| \neq 0$, $q \neq 0$

При $n = 3$.

1. $\lambda_1(v, e_1)^2 + \lambda_2(v, e_2)^2 + \lambda_3(v, e_3)^2 + c = 0$, *где* $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$
2. $\lambda_1(v, e_1)^2 + \lambda_2(v, e_2)^2 + 2q(v, e_3) = 0$, *где* $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$, $q \neq 0$

Доказательство. Предположим, что квадрика центральна и поместим точку O в центр квадрики. По определению центра равенство

$$(Fv, v) + 2(b, v) + c = 0$$

имеет место в том и только в том случае, когда верно равенство

$$(Fv, v) - 2(b, v) + c = 0.$$

В этом случае уравнение квадрики (2) имеет вид

$$(Fv, v) + c = 0.$$

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $F \in l(V)$ (такой существует по теоремам 5.11, 5.13). В этом базисе уравнение квадрики имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v, e_i)^2 + c = 0,$$

что соответствует случаю 1 в обеих размерностях.

[*Вспомогательное утверждение.* Любой вектор $v \in V$ допускает единственное представление в виде $v = v' + v''$, где $v' \in \ker F$, $v'' \in \operatorname{im} F$. Действительно, такое представление существует, т.к. по теоремам 5.11, 5.13 в пространстве V имеется базис, состоящий из собственных векторов оператора F [1]. С другой стороны, пусть $v = u' + u''$ — другое разложение. В силу того, что $u' + u'' = v' + v''$ имеем $v' - u' = u'' - v''$. Но $v' - u' \in \ker F$, а $u'' - v'' \in \operatorname{im} F$, откуда по теореме 1.13 [2] имеем $v' - u' = u'' - v'' = \mathbf{0}$. **]**

Предположим, квадрика, заданная уравнением (2) не центральна. По лемме 5.18 имеем $b \notin \operatorname{im} F$ (отрицание первого утверждения леммы). Пусть $b = b' + b''$ — разложение вектора на ядерную и образную составляющие и v^0 такой вектор, что $Fv^0 = -b''$. В силу того, что $b \notin \operatorname{im} F$ имеем $b' \neq \mathbf{0}$. Запишем уравнение (2) используя точку $O_t = O + v^0 + tb'$ в качестве центра: точка $O_t + v$ принадлежит квадрике $Q(f)$ в том и только в том случае, если

$$\begin{aligned}0 = f(O_t + v) = f(O + v^0 + tb' + v) = \\ = (F(v + tb' + v^0), v + tb' + v^0) + 2(b, v + tb' + v^0) + c = \\ = (Fv, v) + 2(F(tb' + v^0) + b, v) + (F(v^0 + tb'), v^0 + tb') + 2(b, v^0 + tb') + c = \\ (Fv, v) + 2(b', v) + f(O_t).\end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что $F(v^0 + tb') = -b''$.

Множество точек $\{O_t : t \in \mathbb{R}\}$ является аффинной прямой. Покажем, что эта прямая пересекается с квадрикой $Q(f)$. Действительно, имеем равенство

$$f(O_t) = f(O + v^0 + tb_1) = (F(v^0 + tb'), v^0 + tb') + 2(b, v^0 + tb') + c =$$

$$= (Fv_0, v_0) + 2(b, v_0) + c + 2t(b, b') = f(O_0) + 2t|\, b'|^2.$$

Пусть

$$t^* = -\frac{f(O_0)}{2|\, b'|^2}.$$

Ясно, что $f(O_{t^*}) = 0$, поэтому $O_{t^*} \in Q(f)$. Таким образом уравнение квадрики $Q(f)$ при переносе начала координат в точку O_{t^*} имеет вид

$$f(O_{t^*} + v) = (Fv, v) + 2(b', v) = 0, \tag{3}$$

[1] вектора с ненулевыми собственными значениями порождают $\operatorname{im} F$, тогда как вектора с нулевыми собственными значениями порождают $\ker F$

[2] $\dim \ker F + \dim \operatorname{im} F = \dim V$, поэтому $\operatorname{im} F \cap \ker F = \{\mathbf{0}\}$

где $b' \in \ker F$.

$[n = 2]$. Согласно теореме 5.11 выберем ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$, в векторном пространстве V, состоящий из собственных векторов, так, что $Fe_1 = 0$, $Fe_2 = \lambda_2 e_2$ и $b' = qe_1$ $(q, \lambda_2 \neq 0)$. Таким образом уравнение (3) перепишется в виде

$$\lambda_2 (v, e_2)^2 + 2q(e_1, v) = 0.$$

$[n = 3]$. Пусть $e_3 \in V$ такой единичный вектор, что $b' = qe_3$. Ясно, что e_3 — единичный собственный вектор оператора F с нулевым собственным значением. По теоремам 5.13 можно выбрать ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^3$, в векторном пространстве V, состоящий из собственных векторов[3]. Таким образом уравнение (3) перепишется в виде

$$\lambda_1 (v, e_1)^2 + \lambda_2 (v, e_2)^2 + 2q(e_3, v) = 0.$$

□

Теорема 5.20. *Полный список квадрик при* $n = 2$.

1. *Эллипс* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
2. *Гипербола* $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
3. *Парабола* $y^2 = 2px$
4. *Пара параллельных прямых* $x^2 = a^2$
5. *Пара пересекающихся прямых* $b^2x^2 = a^2y^2$
6. *Одна прямая* $x^2 = 0$
7. *Точка* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$
8. *Пустое множество* $a^2x^2 + b^2y^2 = -d^2$, $d \neq 0$

Теорема 5.21. *Полный список квадрик при* $n = 3$.

1. *Эллипсоид* $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$
2. *Однополостной гиперболоид* $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$
3. *Двуполостной гиперболоид* $x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$

[3]Если $\dim \ker F = 1$, то теорема 5.13 применяется напрямую. Если $\dim \ker F = 2$, то можно показать, что в качестве третьего собственного вектора можно выбрать e_3.

4. *Эллиптический параболоид* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$
5. *Гиперболический параболоид* $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$
6. *Конус* $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$
7. *Точка* $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$
8. *Эллиптический цилиндр (п. 1 теоремы 5.20)*
9. *Гиперболический цилиндр (п. 2 теоремы 5.20)*
10. *Параболический цилиндр (п. 3 теоремы 5.20)*
11. *Пара параллельных плоскостей (п. 4 теоремы 5.20)*
12. *Пара пересекающихся плоскостей (п. 5 теоремы 5.20)*
13. *Плоскость (п. 6 теоремы 5.20)*
14. *Прямая (п. 7 теоремы 5.20)*
15. *Пустое множество* $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -d^2$, $d \neq 0$