§6 Геометрические свойства квадрик в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

Лемма 6.1. *Пусть $Q(f)$ — квадрика, заданная уравнением*

$$f(O+v) = (Fv, v) + 2(b, v) + c$$

и $A + ut$ — прямая в аффинном пространстве $\mathcal{A}$. Имеет место следующая альтернатива.

1. Прямая содержится в квадрике ($(Fu, u) = 0$, $(Fu_0 + b, u) = 0$, $f(A) = 0$).

2. Прямая и квадрика имеют две общие точки ($(Fu, u) \neq 0$ и $(Fu_0 + b, u)^2 > (Fu, u) \cdot f(A)$).

3. Прямая и квадрика имеют одну общую точку ($(Fu, u) \neq 0$ и $(Fu_0 + b, u)^2 = (Fu, u) \cdot f(A)$ или $(Fu, u) = 0$, $(Fu_0 + b, u) \neq 0$).

4. Прямая и квадрика не имеют общих точек ($(Fu_0+b, u)^2 < (Fu, u) \cdot f(A)$ или $(Fu, u) = 0$, $(Fu_0 + b, u) = 0$, $f(A) \neq 0$).

(Здесь $u_0 = A - O$).

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} f(A+vt) = f(O+u_0+tu) = (F(u_0+tu), u_0+tu) + 2t(b, u_0+tu) + c = \\ = t^2(Fu, u) + 2t(Fu_0 + b, u) + f(A). \end{aligned}$$

□

Если прямая $A + ut$ пересекает квадрику ровно в двух точках $B, C \in Q(f)$, то отрезок BC называется *хордой направления u*. Ясно, что хорды имеются только у непустых квадрик, отличных от точки, прямой и плоскости (т.е. не совпадающих ни с каким аффинным подпространством).

Лемма 6.2. *Геометрическое место середин параллельных хорд квадрики в $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^n$ содержится в некотором аффинном подпространстве размерности $n - 1$.*

Доказательство. Согласно предыдущей лемме, прямая $A + ut$ содержит хорду в том и только в том случае, когда $(Fu_0+b, u)^2 > (Fu, u) \cdot f(A)$ и $(Fu, u) \neq 0$. При этом серединой хорды является точка

$$\varphi(A) = A - \frac{(F(A-O)+b, u)}{(Fu, u)} \cdot u$$

(теорема Виета).

Отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является аффинным:

$$\mathrm{d}\,\varphi(v) = v - \frac{(Fv, u)}{(Fu, u)} \cdot u.$$

Также нетрудно видеть, что $(\mathrm{d}\,\varphi(v), Fu) = 0$ для любого вектора $v \in V$. Таким образом, если $\varphi(A_1)$, $\varphi(A_2)$ — середины двух различных хорд, то

$$(\varphi(A_2) - \varphi(A_1), Fu) = (\mathrm{d}\,\varphi(A_2 - A_1), Fu) = 0.$$

Это означает, что геометрическое место середин параллельных хорд лежит во множестве

$$\{B \in \mathcal{A} \,:\, (B - \varphi(A_1), Fu) = 0\},$$

где точка $A_1 \in \mathcal{A}$ удовлетворяет неравенству

$$f(A_1) \cdot (Fu, u) < (F(A_1 - O) + b, u)^2.$$

□

Определение 6.3. В случае $n = 2$ прямая, содержащая середины параллельных хорд квадрики с направлением $u \in V$ называется *диаметром, сопряженным данному направлению.* В случае $n = 3$ плоскость, содержащая середины параллельных хорд квадрики с направлением $u \in V$ называется *диаметральной плоскостью, сопряженной данному направлению.* Прямая, по которой пересекаются две диаметральные плоскости, называется *диаметром* квадрики.

Заметим, что вектор $Fu \neq \mathbf{0}$ является вектором нормали диаметра (диаметральной плоскости), сопряженного направлению $u \in V$.

Лемма 6.4. *Аффинное подпространство* $(r - r_0, Fu) = 0$ *аффинного пространства* $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ *является диаметром (диаметральной плоскостью) квадрики, заданной уравнением*

$$f(O + v) = (Fv, v) + 2(b, v) + c = 0,$$

в том и только в том случае, когда $Fr_0 + b \perp u$.

Доказательство. На прямой должна найтись точка, для которой $\varphi(r) = r \Leftrightarrow (Fr + b, u) = 0$. Вместе с равенством $(Fr - Fr_0, u) = 0$ получим нужное условие. □

Предложение 6.5. *1. Пусть квадрика на аффинной плоскости имеет два не параллельных диаметра. Тогда точка пересечения этих диаметров является центром квадрики.*

2. Пусть квадрика в аффинном пространстве имеет два пересекающихся диаметра. Тогда точка пересечения этих диаметров является центром квадрики.

Доказательство. Мы предполагаем, что квадрика задана уравнением (2) предыдущего параграфа (при некотором выборе точки O).

1. Пусть прямые $(r - r_0, Fu) = 0$ и $(r - r_1, Fu') = 0$ являются не параллельными диаметрами квадрики $Q(f)$. Это значит, что $[Fu, Fu'] \neq 0$, то есть $\det F \cdot [u, u'] = [Fu, Fu'] \neq 0$, поэтому оператор F обратим (предложение 5.6).

По предыдущей лемме имеем $(Fr_0 + b, u) = 0$ и $(Fr_1 + b, u') = 0$, поэтому $(r_0 + F^{-1}b, Fu) = 0$ и $(r_1 + F^{-1}b, Fu') = 0$. Таким образом точка $A = O - F^{-1}b$ лежит на обеих диаметрах. Далее: $F(A - O) + b = \mathbf{0}$, поэтому точка A является центром квадрики (см. формулу в конце доказательства леммы 5.18).

2. Если у квадрики имеется два пересекающихся диаметра, то имеются и три пересекающихся в одной точке диаметральных плоскости. Пусть их уравнения $(r-r_0, Fu) = 0$, $(r-r_1, Fu') = 0$ и $(r-r_2, Fu'') = 0$. Это значит, что $[Fu, Fu', Fu''] \neq 0$, то есть $\det F \cdot [u, u', u''] = [Fu, Fu', Fu''] \neq 0$, поэтому оператор F обратим (предложение 5.6).

По предыдущей лемме имеем

$$\begin{cases} (Fr_0 + b, u) = 0, \\ (Fr_1 + b, u') = 0, \\ (Fr_2 + b, u'') = 0, \end{cases}$$

поэтому (оператор F симметричен и обратим)

$$\begin{cases} (r_0 + F^{-1}b, Fu) = 0, \\ (r_1 + F^{-1}b, Fu') = 0, \\ (r_2 + F^{-1}b, Fu'') = 0. \end{cases}$$

Таким образом точка $A = O - F^{-1}b$ лежит во всех трех диаметральных плоскостях. Далее: $F(A-O)+b = \mathbf{0}$, поэтому точка A является центром квадрики (см. формулу в конце доказательства леммы 5.18). $\square$

Квадрика называется *линейчатой*, если она может быть представлена как непустое объединение прямых.

Предложение 6.6. *Из нецилиндрических квадрик в* $\mathbb{R}^3$ *линейчатыми являются только однополостной гиперболоид (ОГ), гиперболический параболоид (ГП) и конус. Через каждую точку ОГ и ГП проходят ровно две прямые, лежащие на данной квадрике.*

Доказательство. Нецилиндрические квадрики это квадрики 1-7 и 15 теоремы 5.21. Несложные соображения убеждают, что квадрики 1, 3, 4, 7, 15 не могут быть линейчатыми.

Пусть квадрика задана уравнением $f(O+v) = (Fv, v)+2(b, v)+c = 0$. Для того, чтобы в этой квадрике содержалась прямая $A+ut$ необходимо и достаточно (п. 1 леммы 6.1), чтобы имели место следующие равенства

$$\begin{cases} (Fu, u) = 0 \\ (F(A-O)+b, u) = 0 \\ f(A) = 0 \end{cases}.$$

Пусть $u_0 = A - O$, тогда

$$\begin{cases} (Fu, u) = 0 \\ (Fu_0+b, u) = 0 \\ (Fu_0, u_0)+2(b, u_0)+c = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Рассмотрим **однополостной гиперболоид**. Согласно теореме 5.21 найдется система координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ (базис ортонормирован), в которой ОГ задается уравнением[1]

$$f(O+xe_1+ye_2+ze_3) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1 = 0.$$

Пусть $A(x_0, y_0, z_0)$ — точка на ОГ и $u = u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3$. Таким образом первое равенство из (1) выглядит так:

$$\frac{u_1^2}{a^2}+\frac{u_2^2}{b^2}-\frac{u_3^2}{c^2} = 0.$$

В силу того, что прямая, параллельная плоскости OXY не может лежать на ОГ, можно считать, что $u_3 = c$. В этом случае все решения предыдущего равенства можно выразить как функции параметра θ:

$$u_1 = a\cdot\cos\theta, \quad u_2 = b\cdot\sin\theta, \quad u_3 = c.$$

[1] откуда следует, что

$$(Fv, v) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

для вектора $v = xe_1+ye_2+ze_3$, а также, что $b = \mathbf{0}$, $c = -1$.

Второе равенство из (1) выглядит так[2] :

$$\frac{u_1x_0}{a^2}+\frac{u_2y_0}{b^2}-\frac{u_3z_0}{c^2}=0.$$

Таким образом

$$\frac{x_0\cos\theta}{a}+\frac{y_0\sin\theta}{b}-\frac{z_0}{c}=0.$$

Третье равенство из (1) говорит о том, что точка $A(x_0,y_0,z_0)$ лежит на ОГ:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

Подставим выражение для z_0/c из предыдущего равенства в данное:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\left(\frac{x_0\cos\theta}{a}+\frac{y_0\sin\theta}{b}\right)^2=1.$$

Левая часть этого равенства является полным квадратом. Таким образом параметр θ должен удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{x_0\sin\theta}{a}-\frac{y_0\cos\theta}{b}&=\pm1\\ \frac{x_0\cos\theta}{a}+\frac{y_0\sin\theta}{b}&=\frac{z_0}{c}.\end{aligned}$$

Таким образом, параметр θ может принимать два значения:

$$\cos\theta_\pm=\left(\frac{x_0z_0}{ac}\mp\frac{y_0}{b}\right)\Big/\left(1+\frac{z_0^2}{c^2}\right)$$

$$\sin\theta_\pm=\left(\frac{y_0z_0}{bc}\pm\frac{x_0}{a}\right)\Big/\left(1+\frac{z_0^2}{c^2}\right).$$

То есть через каждую точку $A(x_0,y_0,z_0)$ на ОГ проходят две прямых, лежащих на ОГ. Направляющие вектора этих прямых:

$$u_+=a\cos\theta_+\cdot e_1+b\sin\theta_+\cdot e_2+c\cdot e_3,$$

$$u_-=a\cos\theta_-\cdot e_1+b\sin\theta_-\cdot e_2+c\cdot e_3.$$

[2] Действительно,

$$(Fu_0,u)=\frac{1}{2}\Big((F(u_0+u),u_0+u)-(Fu,u)-F(u_0,u)\Big)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(x_0+u_1)^2}{a^2}+\frac{(y_0+u_2)^2}{b^2}-\frac{(z_0+u_3)^2}{c^2}-\frac{u_1^2}{a^2}-\frac{u_2^2}{b^2}+\frac{u_3^2}{c^2}-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=\frac{u_1x_0}{a^2}+\frac{u_2y_0}{b^2}-\frac{u_3z_0}{c^2}$$

Рассмотрим **гиперболический параболоид**. Согласно теореме 5.21 найдется система координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ (базис ортонормирован), в которой ГП задается уравнением[3]

$$f(O + xe_1 + ye_2 + ze_3) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0.$$

Пусть $A(x_0, y_0, z_0)$ — точка на ГП и $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$. Таким образом первое равенство из (1) выглядит так:

$$\frac{u_1^2}{a^2} - \frac{u_2^2}{b^2} = 0.$$

В силу того, что прямая, параллельная оси OZ не может лежать на ГП (почему?), можно считать, что $u_1 \neq 0$. В этом случае все решения предыдущего равенства можно выразить как функции параметра λ:

$$u_1 = a, \quad u_2 = \pm b, \quad u_3 = \lambda.$$

Второе равенство из (1) выглядит так[4] :

$$\frac{u_1x_0}{a^2} - \frac{u_2y_0}{b^2} - u_3 = 0.$$

Таким образом

$$\lambda = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}.$$

То есть через каждую точку $A(x_0, y_0, z_0)$ на ГП проходят две прямых, лежащих на ГП. Направляющие вектора этих прямых:

$$u_+ = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + \lambda \cdot e_3,$$

$$u_- = a \cdot e_1 - b \cdot e_2 + \lambda \cdot e_3.$$

Конус. Пусть A — точка на конусе. Проведем прямую через A и вершину конуса (начало координат, если конус задан уравнением 6 теоремы 5.21). Очевидно, что эта прямая лежит на конусе. □

[3] откуда следует, что

$$(Fv, v) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

для вектора $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, а также, что $b = -e_3$, $c = 0$.

[4] Действительно,

$$(Fu_0 + b, u) = \frac{1}{2}\Big((F(u_0 + u), u_0 + u) - (Fu, u) - F(u_0, u)\Big) + (b, u) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(x_0 + u_1)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + u_2)^2}{b^2} - \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) - u_3 = \frac{u_1x_0}{a^2} - \frac{u_2y_0}{b^2} - u_3$$

Пусть квадрика $Q(f)$ в аффинном пространстве задана уравнением $f(A+v) = (Fv, v) + 2(b, v) + c$ и $B \in Q(f)$ — точка на квадрике. Вектор $n_B = F(B-A) + b$ называется *вектором нормали* к квадрике в точке B.

Упражнение. Вектор нормали в точке B равен нулю в том и только в том случае, если точка B является центром симметрии квадрики.

Определение 6.7. Пусть точка B лежит на квадрике и $n_B \neq 0$ — вектор нормали в данном точке. Прямая $B + ut$, где $u \perp n_B$, называется *прямой, касательной к квадрике* в данной точке[5].

Предложение 6.8. *Прямая, касательная к квадрике, либо имеет с квадрикой одну общую точку, либо лежит на квадрике целиком.*

Доказательство. Пусть $B + tu$ — касательная к квадрике $f(A+v) = (Fv, v) + 2(b, v) + c = 0$ в точке B. Имеет место равенство

$$(F(B-A) + b, u)^2 = (n_B, u)^2 = 0 = (Fu, u) \cdot f(B).$$

Таким образом для прямой $B + tu$ и квадрики $Q(f)$ имеют место случаи 1 и 3 леммы 6.1. □

Классические свойства квадрик в $\mathbb{R}^2$

Предложение 6.9 (Директориальное свойство). *Уравнения эллипса, параболы и гиперболы могут быть приведены к виду*

$$x^2 + y^2 = (ex \pm p)^2 \quad e \geq 0,\ p > 0.$$

Число e называется *эксцентриситетом*, а число p — *параметром*.
Доказательство. Возьмем уравнение гиперболы в канонической форме

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b.$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ — некоторое число. Перепишем уравнение гиперболы в следующей форме:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x + x_0 - x_0)^2 - b^2$$

$$(x+x_0)^2 + y^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)(x+x_0)^2 - 2\frac{b^2}{a^2}x_0(x+x_0) + \frac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2.$$

[5] Таким образом касательная к квадрике в центре симметрии нами не определяется.

Подберем x_0 так, чтобы справа оказался полный квадрат:

$$\frac{b^4}{a^4}x_0^2 = \left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2\right)$$

что преобразовывается к виду

$$x_0^2 = \left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\cdot\left(x_0^2 - a^2\right) \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = a^2 + b^2.$$

Таким образом исходное уравнение гиперболы равносильно следующему:

$$\left(x \pm \sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}\,\left(x \pm \sqrt{a^2+b^2}\right) \mp \frac{b^2}{a}\right)^2.$$

Положим $e = \sqrt{a^2+b^2}/a$ и $p = b^2/a$. В системе координат с центром в точке $F_1(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ уравнение квадрики имеет вид

$$x^2 + y^2 = \left(ex + \frac{b^2}{a}\right)^2.$$

Точка F_1 называется (левым) *фокусом*. Прямая $x = -p/e$ (в новой системе координат) называется директрисой, соответствующей фокусу F_1.

В системе координат с центром в точке $F_2(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ уравнение квадрики имеет вид

$$x^2 + y^2 = \left(ex - \frac{b^2}{a}\right)^2.$$

Точка F_2 называется (правым) *фокусом*. Прямая $x = p/e$ (в новой системе координат) называется директрисой, соответствующей фокусу F_2. $\square$

Полученные в предыдущем доказательстве уравнения можно переписать в виде

$$|AF| = e \cdot d_F(A), \tag{2}$$

где F — фокус, а $d_F(A)$ — расстояние от точки A до директрисы, соответствующей этому фокусу (см. рис. 1-3). Заметим, что эллипс расположен *между* своими директрисами, а ветви гиперболы расположены *вне* полосы между директрисами. Расстояние от фокуса до соответствующей директрисы равно p/e.

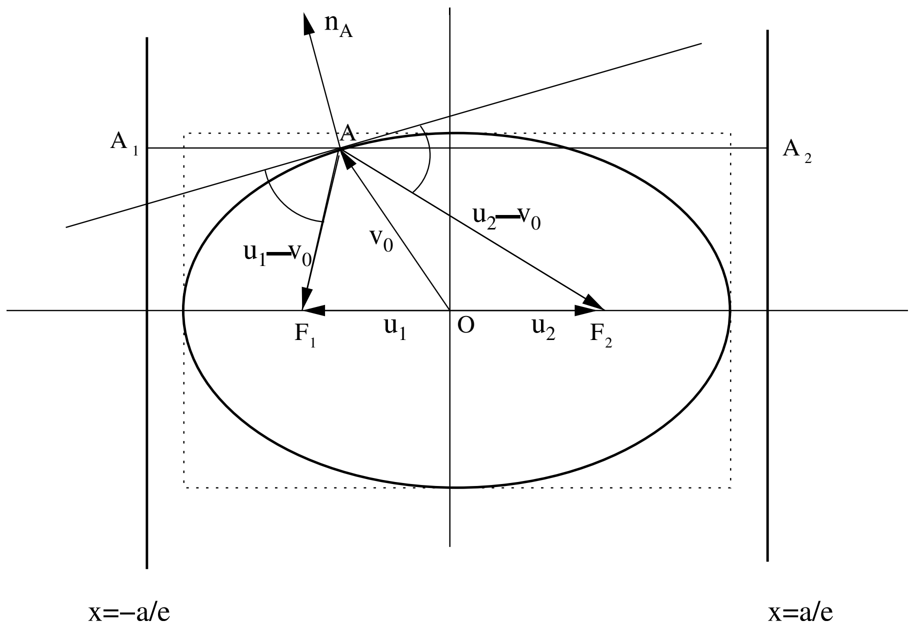

Рис. 1: Эллипс. Фокусы: $F_1(-ae, 0)$, $F_2(ae, 0)$.

Расстояние между директрисами (и у гиперболы и у эллипса) равно абсолютной величине числа $2p/e - |F_1F_2|$. Легко видеть, что это в точности $2a/e$.

Предложение 6.10 (Фокальное свойство). *1. Эллипс является множеством точек, для которых сумма расстояний до фокусов постоянна.*

2. Гипербола является множеством точек, для которых модуль разности расстояний до фокусов постоянен.

Доказательство. Пусть A — точка на квадрике. Согласно равенству (2) имеем $|AF_1| \pm |AF_2| = e(|AA_1| \pm |AA_2|)$ (см. рис. 1, 2).

1. В случае эллипса точка A находится между директрисами, поэтому $|AA_1| + |AA_2|$ есть расстояние между директрисами. Таким образом $|AF_1| + |AF_2| = 2a$.

2. В случае гиперболы точка A находится по одну сторону от директрис, поэтому $\big||AA_1| - |AA_2|\big|$ также равно расстоянию между директрисами. Таким образом $\big||AF_1| - |AF_2|\big| = 2a$. □

Предложение 6.11 (Оптическое свойство). *1. Рассмотрим касательную к гиперболе (эллипсу) в точке A. Прямые, проходящие через*

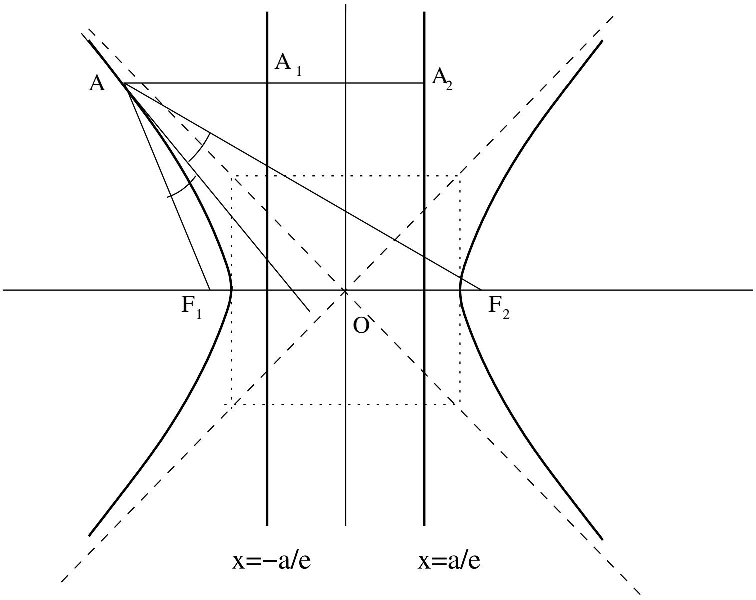

Рис. 2: Гипербола. Фокусы: $F_1(-ae, 0)$, $F_2(ae, 0)$.

фокусы и точку A, пересекаются с данной касательной под равными острыми углами.

2. Рассмотрим касательную к параболе в точке A. Прямая, соединяющая фокус с точкой A и диаметр, проходящий через эту точку, пересекаются с данной касательной под равными острыми углами.

Доказательство. 1. Если квадрика задана уравнением $f(O + v) = (Fv, v) - 1 = 0$ и $A = O + v_0$ — точка на квадрике, то нормальный вектор в этой точке есть $n_A = Fv_0$, направляющий вектор касательной в этой точке может быть представлен в виде JFv_0. Пусть $u_i = F_i - O$ — вектор, направленный из точки O в i-ый фокус ($i = 1, 2$). Направляющий вектор прямой, соединяющий этот фокус с точкой A, может быть записан в виде $u_i - v_0$. Таким образом синус угла между касательной и прямой, проведенной через фокус, равен

$$\sin\varphi_i = \frac{[u_i - v_0, JFv_0]}{|u_i - v_0| \cdot |\,Fv_0\,|} = \frac{(u_i - v_0, Fv_0)}{|AF_i| \cdot |\,Fv_0\,|} = \frac{(u_i, Fv_0) - 1}{e \cdot |AA_i| \cdot |\,Fv_0\,|}\,.$$

Но $(u_i, Fv_0) = (Fu_i, v_0) = (u_i, v_0)/a^2 = {}^6 = \pm ea(a/e - |AA_i|)/a^2 = \pm(1 - e|AA_i|/a)$. Таким образом

$$\sin\varphi_1 = \pm\sin\varphi_2 = \frac{1}{a\cdot|Fv_0|}.$$

2. Если парабола задана уравнением $f(O+v) = (Fv, v) - 2p(e_1, v) = 0$ и $A = O + v_0$ — точка на параболе, то нормальный вектор в этой точке есть $n_A = Fv_0 - pe_1$, направляющий вектор касательной в этой точке может быть представлен в виде $J(Fv_0 - pe_1)$. Пусть $u_0 = p/2 \cdot e_1$ — вектор, направленный из точки O в фокус параболы. Направляющий вектор прямой, соединяющий этот фокус с точкой A, может быть записан в виде $u_0 - v_0$.

$$\sin\varphi = \frac{[u_0 - v_0, J(Fv_0 - pe_1)]}{|u_0 - v_0|\cdot|\,Fv_0 - pe_1\,|} = \frac{(u_0 - v_0, Fv_0 - pe_1)}{|AA'|\cdot|\,Fv_0 - pe_1\,|} = \frac{-p^2/2 - p\cdot(e_1, v_0)}{|AA'|\cdot|\,Fv_0 - pe_1\,|}.$$

Но $|AA'| = p/2 + (e_1, v_0)$, поэтому

$$\sin\varphi = \frac{-p^2/2 - p\cdot(e_1, v_0)}{(p/2 + (e_1, v_0))\cdot|\,Fv_0 - pe_1\,|} = -\frac{p}{|\,Fv_0 - pe_1\,|}\,.$$

Это в точности синус угла между векторами $Fv_0 - pe_1$ и e_1. □

Теорема 6.12. *Пусть квадрика $Q(f)$ в аффинном пространстве $\mathcal{A}, V$ не является сильно вырожденной (определение 5.16) и $Q(f) = Q(g)$ для некоторой аффинно-квадратичной функции g. Тогда $f = ag$ для некоторого числа $a \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. [7] Если квадрика не является сильно вырожденной, то на ней найдутся две различные точки $A_1, A_2 \in Q(f)$ для которых прямая $A_1 + t(A_2 - A_1)$ не содержится в данной квадрике (имеет с квадрикой ровно две общие точки — п. 2 леммы 6.1). Пусть $v_0 = A_2 - A_1$ и

$$f(A_1 + v) = (Fv, v) + 2(b, v) = 0, \quad g\,(A_1 + v) = (Gv, v) + 2(d, v) = 0$$

уравнения данной квадрики. В силу того, что $f(A_2) = g\,(A_2) = 0$, имеем $(Fv_0, v_0) + 2(b, v_0) = 0$ и $(Gv_0, v_0) + 2(d, v_0) = 0$.

[6] Продумайте это равенство

[7] постарайтесь придумать свое доказательство

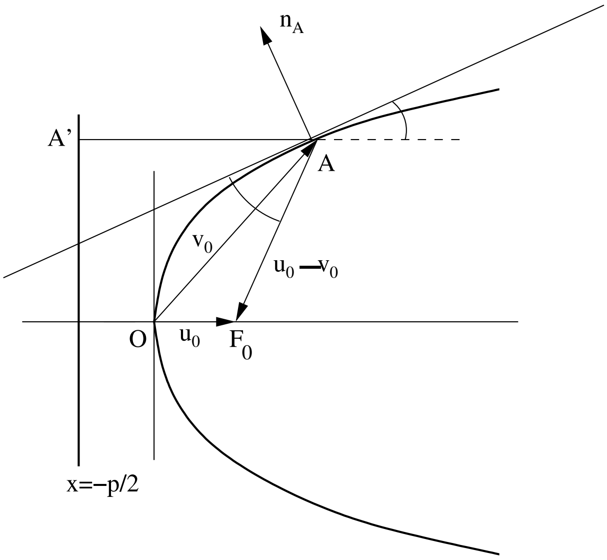

Рис. 3: Парабола. Фокус $F_0(p/2, 0)$.

Рассмотрим аффинно-квадратичную функцию

$$\varphi(A) = g\,(A^*)f(A) - f(A^*)g\,(A),$$

где $A^* = A_1 + \frac{1}{2}v_0$ — середина отрезка A_1A_2. Если $\varphi \equiv 0$, то далее доказывать нечего. Предположим $\varphi \not\equiv 0$. Тогда $Q(f)$ — квадрика и $Q(f) \subset Q(\varphi)$. Покажем, что $\varphi(A) = 0$ для любой точки прямой $A_1 + tv_0$:

$$\varphi(A_1 + tv_0) = g\left(A_1 + \frac{1}{2}\,v_0\right) f(A_1 + tv_0) - f\left(A_1 + \frac{1}{2}\,v_0\right) g\,(A_1 + tv_0) = 0.$$

Таким образом квадрика $Q(\varphi)$ содержит не сильно вырожденную квадрику $Q(f)$ и не принадлежащую ей прямую. Чего не может быть (см. классификацию квадрик). $\square$