

Глава V. Определители

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Задачи, для записи решения которых полезны определители. Обозначим через Λ кольцо $\mathbb{Z}[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ целочисленных многочленов n^2 переменных x_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$). Есть все основания поверить в то, что матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

рассматриваемая как матрица над полем отношений K кольца Λ , невырождена, и поэтому у нее есть обратная матрица X^{-1} , все компоненты которой принадлежат полю K . Но элементы поля K — это отношения многочленов из кольца Λ . Достаточно ясно, что не может быть, чтобы все компоненты матрицы (X^{-1}) принадлежали кольцу Λ ; однако, найдется такой многочлен $D(x_{11}, \dots, x_{nn})$, что все компоненты матрицы $Y = D(x_{11}, \dots, x_{nn})X^{-1}$ уже являются целочисленными многочленами. Таким образом, целочисленный многочлен $D(x_{11}, \dots, x_{nn})$ и матрица Y обладают следующими свойствами:

$$Y \in \Lambda_n, \quad D(x_{11}, \dots, x_{nn}) \in \Lambda, \quad XY = D(x_{11}, \dots, x_{nn})E_n$$

Конечно, многочлен, обладающий этими свойствами, не является единственным: вместо него можно взять любой делящийся на него многочлен. Однако, можно доказать, что если потребовать, чтобы его полная степень была минимально возможной, и чтобы он принимал значение 1, если все диагональные элементы x_{ii} матрицы X равны 1, а все недиагональные элементы x_{ij} , $i \neq j$, равны 0, многочлен $D(x_{11}, \dots, x_{nn})$ уже оказывается однозначно определенным; он и называется определителем матрицы X .

Возможно построить теорию определителей, исходя из только что данного определения; мы поступим иначе. Сначала выясним, как выглядит определитель при $n = 2, 3$; на основании этого эксперимента выскажем гипотезу, как должен выглядеть определитель произвольного порядка, а затем докажем, что угаданный многочлен действительно является знаменателем всех компонент матрицы X^{-1} .

Определители 2-го и 3-го порядков. Пользуясь способом вычисления обратной матрицы, который был описан в главе 3, найдем матрицу, обратную к X , для $n = 2$ (для краткости независимые переменные x_{ij} обозначены через x, y, z, t :

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 & 0 \\ z & t & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & y/x & 1/x & 0 \\ z & t & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & y/x & 1/x & 0 \\ 0 & t - zy/x & -z/x & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & y/x & 1/x & 0 \\ 0 & 1 & -z/(xt - yz) & x/(xt - yz) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t/(xt - yz) & -y/(xt - yz) \\ 0 & 1 & -z/(xt - yz) & x/(xt - yz) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица, обратная к матрице X , равна

$$\frac{1}{xt - yz} \begin{pmatrix} t & -y \\ -z & x \end{pmatrix}.$$

Исходя из наших соображений, за определитель второго порядка следует принять многочлен

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = xt - yz.$$

Аналогичное вычисление можно произвести для матрицы общего вида порядка 3. Не приводя выкладок, укажем лишь результат, который легко проверяется прямым вычислением:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} & -x_{12}x_{33} + x_{13}x_{32} & x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22} \\ -x_{21}x_{33} + x_{23}x_{31} & x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31} & -x_{11}x_{23} + x_{13}x_{21} \\ x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31} & -x_{11}x_{32} + x_{12}x_{31} & x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \end{pmatrix} = \\ = (x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31})E_3.$$

Таким образом, следует положить

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - \\ - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31}.$$

Определение определителя. Пусть, как и выше,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица над кольцом многочленов $\Lambda = \mathbb{Z}[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ от n^2 переменных x_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$). Ее определителем называется многочлен

$$\det X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \dots x_{n,\sigma(n)}.$$

В этом представлении у каждого слагаемого определителя зафиксирован порядок сомножителей; это не всегда удобно, и поэтому дадим еще одну запись выражения для определителя:

$$\det X = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i,\sigma(i)}.$$

Основные свойства определителей. Во всех свойствах мы подставляем в определитель вместо неизвестных x_{ij} какие-то значения из кольца Λ или из какого-то еще более широкого кольца; эти выражения надо понимать как значения многочлена \det при соответствующих значениях переменных.

1. При транспонировании определитель не меняется. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix};$$

нам надо доказать, что $\Delta' = \Delta$. По определению определителя,

$$\Delta' = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i),i}.$$

Заметим, что σ^{-1} пробегает группу S_n , когда σ пробегает эту группу и что $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$, поэтому

$$\Delta' = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i),i} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i),i}.$$

Для каждого $\sigma \in S_n$ числа $\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(n)$ составляют перестановку чисел $1, \dots, n$, и потому

$$\prod_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i), i} = \prod_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i), \sigma(\sigma^{-1}(i))} = \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)};$$

следовательно,

$$\Delta' = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i), i} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)} = \Delta.$$

По свойству 1, для каждого свойства определителя, которое формулируется в терминах столбцов определителя, есть аналогичное свойство, формулируемое в терминах строк определителя. Поэтому из двух аналогичных свойств достаточно формулировать и доказывать лишь одно; ввиду более простой записи, мы в следующих свойствах выбрали их столбцовые варианты.

2. *Определитель с равными столбцами равен 0.* Пусть Δ – определитель, полученный из $\det X$ заменой элементов l -го столбца x_{il} на элементы j -го столбца x_{ij} . Обозначим через $\tau \in S_n$ транспозицию (jl) , переставляющую элементы j и l . Пусть $A_n \subset S_n$ – множество всех таких подстановок $\sigma \in S_n$, что $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$; тогда $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) = -1$. Обратно, если $\sigma_1 \in S_n$, $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = -1$, то, полагая $\sigma = \sigma_1\tau$, найдем, что $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma_1\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\tau) = 1$, т.е. $\sigma \in A_n$, и $\sigma_1 = \sigma_1\tau^2 = \sigma\tau$. Таким образом, $S_n = A_n \cup A_n\tau$, где через $A_n\tau$ обозначено множество $\{\sigma\tau \mid \sigma \in A_n\}$.

Сосчитаем теперь определитель Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1), 1} \dots x_{\sigma(j), j} \dots x_{\sigma(l), l} \dots x_{\sigma(n), n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1), 1} \dots x_{\sigma(j), j} \dots x_{\sigma(l), j} \dots x_{\sigma(n), n} = \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} (\operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1), 1} \dots x_{\sigma(j), j} \dots x_{\sigma(l), j} \dots x_{\sigma(n), n} + \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\sigma\tau) x_{\sigma\tau(1), 1} \dots x_{\sigma\tau(j), j} \dots x_{\sigma\tau(l), j} \dots x_{\sigma\tau(n), n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} (x_{\sigma(1), 1} \dots x_{\sigma(j), j} \dots x_{\sigma(l), j} \dots x_{\sigma(n), n} - x_{\sigma(1), 1} \dots x_{\sigma(l), j} \dots x_{\sigma(j), j} \dots x_{\sigma\tau(n), n}) = 0 \end{aligned}$$

(при последнем преобразовании мы воспользовались тем, что $\tau(j) = l$, $\tau(l) = j$, $\tau(i) = i$ при $i \neq l, j$).

3. *Определитель линеен по каждому столбцу.* Это значит, что

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & tx_{1j} + y_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & tx_{2j} + y_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & tx_{nj} + y_{nj} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= t \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & y_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & y_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & y_{nj} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(выражения в обеих частях этого равенства представляют собой многочлены от $x_{11}, \dots, x_{nn}, y_{1j}, \dots, y_{nj}, t$). Действительно,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & tx_{1j} + y_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & tx_{2j} + y_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & tx_{nj} + y_{nj} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots (tx_{\sigma(j),j} + y_{\sigma(j),j}) \dots x_{\sigma(n),n} = \\ & = t \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(j),j} \dots x_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots y_{\sigma(j),j} \dots x_{\sigma(n),n} = \\ & = t \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & y_{1i} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & y_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & y_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

4. При перестановке двух столбцов друг с другом определитель умножается на -1 . Обозначим для краткости столбцы $(x_{1j}, \dots, x_{nj})^T$ матрицы X через \mathbf{x}_j . Пользуясь тем, что определитель с двумя одинаковыми столбцами равен 0, а также линейностью определителя по столбцам, получаем:

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) + \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ & = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_n) + \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) + \\ & + \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_n) + \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ & = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) + \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ & = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) = 0. \end{aligned}$$

5. При прибавлении к одному столбцу кратного другого столбца определитель не меняется:

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j + t\mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) + \\ & + t \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n) + t \cdot 0 = \\ & = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_l, \dots, \mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

Матрицу будем называть треугольной, если все ее элементы, находящиеся ниже диагонали (или все элементы, находящиеся выше диагонали) равны 0.

6. *Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.* Покажем, что если подстановка $\sigma \in S_n$ такова, что $\sigma(i) \geq i$ для всех i , то σ – тождественная подстановка. Действительно, если $\sigma(i) < i$ хотя бы для одного i , то

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n \sigma(i) < \sum_{i=1}^n i,$$

что невозможно. Поэтому если в матрице X все элементы x_{ij} с $j < i$ равны нулю, то в сумме

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \dots x_{n,\sigma(n)},$$

выражающей значение определителя $\det X$, ненулевыми будут только те слагаемые, у которых $i \leq \sigma(i)$ для всех i , т.е. только слагаемое, отвечающее тождественной подстановке. Учитывая, что знак тождественной подстановки равен $+1$, мы получим, что $\det X = x_{11}x_{22} \dots x_{nn}$.

В частности, определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

в которой одним и тем же символом $\mathbf{0}$ обозначены нулевые матрицы из $K^{r \times (n-r)}$, $K^{(n-r) \times r}$ и $K^{(n-r) \times (n-r)}$, равен 1 при $r = n$ и 0 при $r < n$.

Вычисление определителей. Доказанные свойства определителя дают способ вычисления значения определителя любой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

все компоненты a_{ij} которой принадлежат некоторому полю k . Элементарными преобразованиями над строчками и столбцами матрица приводится к треугольной матрице, определитель которой известен по свойству 6. Но каждое элементарное преобразование либо не меняет определитель матрицы, либо умножает его на -1 или на элемент $\alpha \neq 0$ из поля k (соответственно свойства 5, 4, 3), поэтому, зная, чему равен определитель получившейся треугольной матрицы, мы легко восстанавливаем значение определителя матрицы A .

Определитель произведения квадратных матриц. Доказанные выше свойства позволяют получить и более глубокие свойства определителей.

Теорема 1. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix},$$

где $x_{11}, \dots, x_{nn}, y_{11}, \dots, y_{nn}$ — независимые переменные. Тогда определитель $\det XY$ произведения матриц X, Y равен произведению $\det X \det Y$ определителей этих матриц.

Замечание. Все компоненты матрицы XY являются многочленами от независимых переменных $x_{11}, \dots, x_{nn}, y_{11}, \dots, y_{nn}$; поэтому $\det XY$ и $\det X \det Y$ — многочлены из $\mathbb{Z}[x_{11}, \dots, x_{nn}, y_{11}, \dots, y_{nn}]$, и теорема утверждает, что эти многочлены равны.

Доказательство. Обозначим через K поле отношений области целостности $\mathbb{Z}[y_{11}, \dots, y_{nn}]$.

Лемма 1. Пусть A — квадратная матрица порядка n , а $T = \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Тогда $\det AT = \det A \det T$.

Доказательство. Если $r = n$, то $T = E$, $\det T = 1$, $AT = AE = A$. Если $r < n$, то $\det T = 0$, а матрица AT получается из матрицы A умножением нескольких последних столбцов на 0, и потому по свойству 3 $\det AT = 0 \cdot \det A = 0$.

Лемма 2. Пусть A — квадратная матрица с компонентами из K , а T — одна из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \dots & \lambda \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \lambda \in K$, все не отмеченные недиагональные элементы равны 0, а не отмеченные диагональные элементы равны 1. Тогда $\det AT = \det A \det T$.

Доказательство. В первом случае определитель матрицы T равен α (по свойству 6), а матрица AT получается умножением на α всех элементов одного из столбцов матрицы A , и потому по свойству 3 ее определитель равен произведению $\alpha = \det T$ и $\det A$. Во втором случае по свойству 6 $\det T = 1$, а матрица AT получается прибавлением к одному из столбцов другого столбца, умноженного на λ , и потому по свойству 5 ее определитель равен определителю матрицы A .

Вернемся к доказательству теоремы. Как мы знаем, матрица Y представляется в виде произведения $T_1 \dots T_N$, все сомножители которого являются матрицами из K_n одного из видов, рассмотренных в леммах 1, 2. Поэтому индукцией по N получаем:

$$\det XY = \det X(T_1 \dots T_N) = \det X \det T_1 \dots \det T_N.$$

Все матрицы T_i зависят только от y_{11}, \dots, y_{1n} и не зависят от компонент x_{ij} матрицы X ; поэтому соотношение сохранится, если мы придадим неизвестным x_{ij} произвольные значения из \mathbb{Z} . В частности, при $x_{ii} = 1$, $x_{ij} = 0$ при $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, матрица X принимает значение E , и потому

$$\det Y = \det EY = \det E \det T_1 \dots \det T_N = \det T_1 \dots \det T_N.$$

Таким образом,

$$\det XY = \det X \det T_1 \dots \det T_N = \det X \det Y.$$

Характеризация невырожденных матриц в терминах определителя. Добавим к многочисленным характеристикам невырожденных матриц, которые уже встречались у нас, еще одну.

Теорема 2. Пусть k – произвольное поле; квадратная матрица с компонентами из k невырождена тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от 0.

Доказательство. Пусть $A \in k^n$ – квадратная матрица с компонентами из k . Как мы знаем, матрица над полем, матрица A представляется в виде

$$A = T_1 \dots T_N \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} T_{N+1} \dots T_M,$$

где T_1, \dots, T_M – элементарные матрицы, а $r = \text{rank } A$. Определители α_i матриц T_i отличны от 0; поэтому

$$\det A = \det \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \det T_1 \dots \det T_M = \begin{cases} 1 \cdot \alpha_1 \dots \alpha_M \neq 0, & \text{если } r = n; \\ 0 \cdot \alpha_1 \dots \alpha_M = 0, & \text{если } r < n. \end{cases}$$

Итак, определитель $\det A$ матрицы A отличен от 0 тогда и только тогда, когда ее ранг r равен ее порядку n , т.е. когда матрица A невырождена.