Глава VI. Квадратичные формы

§ 1. Квадратичные формы над произвольным полем

1°. **Матрица квадратичной формы.** Напомним (см. §7 главы II), что формой (или однородным многочленом) степени r над полем k от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется такой многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$, который является суммой (быть может, пустой) одночленов полной степени r. Формы степени 2 называются квадратичными формами. Пусть A – квадратная матрица порядка n с компонентами из k, а X – столбец переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

тогда

$$X^{\mathtt{T}} A X = \big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j \Big)$$

– одноэлементная матрица, единственным элементом которой является квадратичная форма

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j.$$

В дальнейшем мы всегда будем отождествлять такие матрицы с единственным составляющим их элементом и опускать ограничивающие их скобки. При таком соглашении предыдущее равенство примет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathtt{T}} A X.$$

Матрица A называется симметричной, если она равна транспонированной к ней матрице $A^{\mathtt{T}}$.

Предложение 1. *Для всякой квадратичной формы $f(x_1, \dots, x_n)$ над полем k, характеристика которого отлична от 2, существует единственная симметричная матрица $A \in k_n$, такая что*

$$f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathtt{T}} A X.$$

Доказательство. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij} x_i x_j \qquad (a_i, b_{ij} \in k)$$

– квадратичная форма над полем k, и пусть $A \in k_n$; элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце этой матрицы будем обозначать a_{ij}. Для того, чтобы матрица A была симметричной и чтобы выполнялось соотношение $f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathtt{T}} A X$, необходимо и достаточно, чтобы элементы $a_{ij} \in k$ удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} & a_{ii} = c_i \qquad (1 \le i \le n), \\ & a_{ij} = a_{ji}, \ \ a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} \qquad (1 \le i < j \le n). \end{aligned}$$

Ясно, что элементы $a_{ii} = c_i$, $a_{ij} = a_{ji} = b_{ij}/2 \ \ (1 \le i < j \le n)$ составляют единственное решение этой системы.

Единственная симметричная матрица $A \in k_n$, такая что $f(x_1, \ldots, x_n) = X^{\mathsf{T}}AX$, называется матрицей квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Замечание. *Для полей характеристики 2 предложение перестает быть верным, и матрица квадратичной формы над таким полем не может быть определена. Формы вида $X^{\mathsf{T}}AX$ над такими полями в случае, когда матрица A симметрична, всегда будут иметь вид $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, и поэтому, например, форма $x_1 x_2$ не может быть представлена в таком виде.*

2°. **Нулевые формы и формы с нулевым умножением.** В дальнейшем нам придется рассматривать квадратичные формы от 0 переменных. Это будет полезно, например, в ситуации, когда мы раскладываем форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ в сумму форм $g(x_1, \ldots, x_m)$ и $h(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, и одно из слагаемых оказывается тривиальным. Если f – форма от пустого множества переменных, то мы называем ее нулевой формой и пишем $f = 0$. Чтобы избежать недоразумений, мы всегда будем называть форму от $n \geq 1$ переменных, матрица которой является нулевой матрицей, формой с нулевыми коэффициентами.

3°. **Ранг формы, невырожденные формы, ортогональная сумма форм.** До конца параграфа через k обозначается некоторое фиксированное поле, характеристика которого не равна 2. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над k; ее рангом $r(f)$ называется ранг ее матрицы. Форма называется невырожденной, если ее матрица невырождена, т.е. если ее ранг равен числу переменных.

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g = g(y_1, \ldots, y_m)$ – квадратичные формы над полем k, причем множества переменных, от которых зависят формы, не пересекаются; тогда форма

$$h = h(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + g(y_1, \ldots, y_m)$$

называется ортогональной суммой форм f и g. Для ортогональной суммы квадратичных форм f и g применяется обозначение $f \perp g$. Еще раз подчеркнем: если $h = f \perp g$, то множества переменных форм f и g не пересекаются, а многочлен h равен сумме многочленов f и g. Если A, B – матрицы форм f и g, то матрица ортогональной суммы $f \perp g$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_{n\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times n} & B \end{pmatrix}$$

(напомним, что через $\mathbf{0}_{s\times t}$ мы обозначаем нулевую матрицу из s строк и t столбцов).

Если $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ – любая квадратичная форма, то $f(0, \ldots, 0) = 0$. Форма f называется анизотропной, если все остальные ее значения отличны от 0, т.е. если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in k$, из которых хотя бы один не равен 0, будет $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Легко видеть, что всякая анизотропная форма невырождена. Действительно, если матрица A формы f вырождена, то однородная система линейных уравнений $AX = 0$ имеет нетривиальное решение $(a_1, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}}$, и тогда

$$f(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)\, A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

значит, форма f не анизотропна.

Напротив, если форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ невырождена, и существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n \in k$, не все равные 0, что $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, то форма $f(x_1, \ldots, x_n)$

называется изотропной. Например, форма $f(x,y)=x^2-y^2$ анизотропна, а форма $g(x,y) = x^2+y^2$ в случае, когда основное поле k является полем вещественных чисел, анизотропна. Заметим, однако, что формы от трех переменных $f_1(x,y,z)=x^2-y^2$, $g_1(x,y,z)=x^2+y^2$ не являются ни изотропными (потому что они вырождены), ни анизотропными.

§ 2. Линейное преобразование переменных в квадратичной форме

1°. **Определение линейного преобразования переменных.** Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – произвольный многочлен с коэффициентами из k; как мы знаем, можно сосчитать его значения при любых значениях переменных, принадлежащих какому угодно кольцу Λ, содержащему k. В частности, пусть $\Lambda = k[y_1,\ldots,y_m]$ – кольцо многочленов от переменных $y_1,\ldots,y_m$; мы не требуем, чтобы все переменные y_j были отличны от переменных x_i. Придавая каждой переменной x_i значение $c_{i1}y_1+\cdots+c_{im}y_m \in k[y_1,\ldots,y_m]$ (все коэффициенты c_{ij} – элементы поля k), мы получим многочлен

$$g(y_1,\ldots,y_m) = f(\sum_{j=1}^{m} c_{1j}y_j,\ldots,\sum_{j=1}^{m} c_{nj}y_j) \in k[y_1,\ldots,y_m].$$

Будем говорить, что он получен из $f(x_1,\ldots,x_n)$ линейным преобразованием переменных

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m}\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix},$$

или, короче, $X=CY$, где через C обозначена матрица коэффициентов преобразования (так что $(C)_{ij}=c_{ij}$), а через X, Y – столбцы $(x_1,\ldots,x_n)^{\mathsf T}$, $(y_1,\ldots,y_m)^{\mathsf T}$.

Предложение 1. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – квадратичная форма с коэффициентами из поля k, A – ее матрица, и пусть $g(y_1,\ldots,y_m)$ – многочлен, полученный из $f(x_1,\ldots,x_n)$ линейным преобразованием переменных $X = CY$. Тогда $g(y_1,\ldots,y_m)$ – тоже квадратичная форма, и ее матрица равна $C^{\mathsf T}AC$.*

Доказательство. Напомним, что значения суммы и произведения многочленов равны соответственно сумме и произведению значений этих многочленов. Поскольку все компоненты суммы и произведения матриц получаются из компонент исходных матриц при помощи сложения и умножения, мы получаем отсюда аналогичное утверждение для матриц, которым будем часто пользоваться:

Пусть U,V,W – матрицы с компонентами из кольца многочленов от одних и тех же переменных, и пусть U_0,V_0,W_0 – матрицы, получающиеся из U,V,W заменой каждого элемента на его значение при каких-то значениях переменных, одних и тех же для всех матриц и всех их компонент. Если $W=U+V$, то $W_0=U_0+V_0$, и аналогично, если $W=UV$, то $W_0=U_0V_0$.

Воспользовавшись этим свойством, сравним значения обеих частей равенства $(f(x_1,\ldots,x_n)) = X^{\mathsf T}AX$ при $X=CY$; мы получим, что

$$(g(y_1,\ldots,y_m)) = (CY)^{\mathsf T}A(CY) = Y^{\mathsf T}C^{\mathsf T}ACY = Y^{\mathsf T}BY,$$

где через B обозначена матрица $C^{\mathsf T}AC$. Таким образом, $g(y_1,\ldots,y_m)$ – квадратичная форма; для того, чтобы доказать, что B является ее матрицей, достаточно убедиться, что матрица B симметрична; но это так:

$$B^{\mathsf T} = (C^{\mathsf T}AC)^{\mathsf T} = C^{\mathsf T}A^{\mathsf T}(C^{\mathsf T})^{\mathsf T} = C^{\mathsf T}AC = B$$

(мы учли здесь, что матрица A исходной квадратичной формы симметрична, т.е. $A^{\mathsf T}=A$). Предложение доказано.

2°. **Некоторые свойства линейных преобразований переменных в квадратичных формах.** Часто оказывается полезным следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть квадратичная форма* $g(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij} y_i y_j$ *получена из квадратичной формы* $f(x_1, \dots, x_n)$ *линейным преобразованием переменных*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого i, $1 \le i \le n$, *диагональный коэффициент* b_{ii} *формы* g *равен* $f(c_{1i}, \dots, c_{ni})$.

Доказательство. Пусть A – матрица квадратичной формы f; тогда матрица формы g равна $C^{\mathrm{T}}AC$ и ее i-й диагональный элемент b_{ii} равен произведению i-й строки матрицы C^{T}, матрицы A и i-го столбца матрицы C, т.е.

$$b_{ii} = (c_{1i}, \dots, c_{ni})A(c_{1i}, \dots, c_{ni})^{\mathrm{T}} = f(c_{1i}, \dots, c_{ni}).$$

Покажем, что последовательное применение линейных преобразований переменных равносильно одному линейному преобразованию.

Предложение 3. *Пусть квадратичная форма* $g(y_1, \dots, y_m)$ *получена из квадратичной формы* $f(x_1, \dots, x_n)$ *линейным преобразованием переменных* $X = CY$, *а квадратичная форма* $h(z_1, \dots, z_l)$ *получена из квадратичной формы* $g(y_1, \dots, y_m)$ *линейным преобразованием переменных* $Y = DZ$ *(через* X, Y, Z *обозначены столбцы соответствующих переменных). Тогда форма* $h(z_1, \dots, z_l)$ *получается из формы* $f(x_1, \dots, x_n)$ *линейным преобразованием переменных* $X = (CD)Z$.

Доказательство. Пусть A – матрица формы $f(x_1, \dots, x_n)$; тогда

$$\begin{aligned} &f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX, \\ &g(y_1, \dots, y_m) = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y, \\ &h(z_1, \dots, z_l) = (DZ)^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)(DZ) = Z^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACDZ = ((CD)Z)^{\mathrm{T}}A(CD)Z). \end{aligned}$$

Таким образом, форма $h(z_1, \dots, z_l)$ получена из формы $f(x_1, \dots, x_n)$ линейным преобразованием переменных $X = (CD)Z$.

3°. **Изометричные квадратичные формы.** Линейное преобразование $X = CY$ называется невырожденным, если невырождена его матрица; в этом случае матрица C квадратная, и потому число переменных до преобразования и после преобразования одно и то же.

Мы говорим, что квадратичная форма $g(y_1, \dots, y_m)$ изометрична над полем k квадратичной форме $f(x_1, \dots, x_n)$, если она получается из $f(x_1, \dots, x_n)$ невырожденным линейным преобразованием переменных с коэффициентами из k. Отсюда, в частности, следует, что число переменных в обеих формах должно быть одинаковым. Покажем, что изометричность форм является отношением эквивалентности.

Предложение 4. (1) *Каждая квадратичная форма изометрична себе.*

(2) *Если квадратичная форма* $g(y_1, \dots, y_m)$ *изометрична квадратичной форме* $f(x_1, \dots, x_n)$, *то и форма* $f(x_1, \dots, x_n)$ *изометрична форме* $g(y_1, \dots, y_m)$.

(3) *Если квадратичная форма* $g(y_1, \dots, y_m)$ *изометрична квадратичной форме* $f(x_1, \dots, x_n)$, *а квадратичная форма* $h(z_1, \dots, z_l)$ *изометрична квадратичной форме* $g(y_1, \dots, y_m)$, *то форма* $h(z_1, \dots, z_l)$ *изометрична форме* $f(x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство. (1) – очевидно.

(2). Пусть A, B – матрицы форм $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(y_1, \dots, y_m)$. Изометричность формы $g(y_1, \dots, y_m)$ форме $f(x_1, \dots, x_n)$ означает, что существует такая обратимая матрица C с компонентами из поля k, что $B = C^{\mathsf{T}}AC$; но тогда матрица C^{-1} тоже обратима, и $(C^{-1})^{\mathsf{T}}BC^{-1} = (C^{-1})^{\mathsf{T}}C^{\mathsf{T}}ACC^{-1} = A$, а это означает, что форма $f(x_1, \dots, x_n)$ изометрична форме $g(y_1, \dots, y_m)$.

(3). Если квадратичная форма $g(y_1, \dots, y_m)$ изометрична квадратичной форме $f(x_1, \dots, x_n)$, то она получена из формы $f(x_1, \dots, x_n)$ преобразованием $X = CY$ с невырожденной матрицей C. Точно так же, если квадратичная форма $h(z_1, \dots, z_m)$ изометрична квадратичной форме $g(y_1, \dots, y_n)$, то она получена из формы $g(x_1, \dots, x_n)$ преобразованием $Y = DZ$ с невырожденной матрицей D. Тогда по предложению 3 форма $h(z_1, \dots, z_m)$ получается из формы $f(x_1, \dots, x_n)$ линейным преобразованием переменных $X = (CD)Z$, которое невырождено, потому что его матрица CD является произведением невырожденных матриц и, значит, сама невырождена. Следовательно, форма $h(z_1, \dots, z_l)$ изометрична форме $f(x_1, \dots, x_n)$.

Замечание. *Две формы, не изометричные над полем k, могут стать изометричными над его расширением. Например, формы x^2+y^2, z^2-t^2 не изометричны над $\mathbb{R}$, но изометричны над $\mathbb{C}$.*

Следующее предложение показывает, что изометричные формы ведут себя сходным образом.

Предложение 5. *Пусть $f = f(x_1, \dots, x_n)$, $g = g(y_1, \dots, y_n)$ – изометричные квадратичные формы.*

(1) *Ранги форм f и g равны.*
(2) *Если форма f невырождена, то и форма g невырождена.*
(3) *Множество значений формы f совпадает с множеством значений формы g.*
(4) *Если форма f анизотропна, то и форма g анизотропна.*
(5) *Если форма f изотропна, то и форма g изотропна.*
(6) *Если $h = h(z_1, \dots, z_m)$ – квадратичная форма, множество переменных которой не пересекается ни с множеством переменных формы f, ни с множеством переменных формы g, то формы $f \perp h$, $g \perp h$ изометричны.*

Доказательство. Пусть A, B – матрицы форм f, g, и пусть $X = CY$ – линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей C, превращающее форму f в форму g.

(1) Поскольку матрица C невырождена, а умножение любой матрицы на невырожденную матрицу не меняет ранг, ранги матриц A и $B = C^{\mathsf{T}}AC$ совпадают. Таким образом, $r(f) = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = r(f)$.

(2) Если форма f невырождена, то $r(f) = n$, а тогда и $r(g) = r(f) = n$, т.е. форма g невырождена.

(3) В силу симметричности ролей, которые играют формы f и g в этом утверждении, достаточно доказать, что множество $\{Y_0^{\mathsf{T}}BY_0 \,|\, Y_0 \in k^n\}$ значений формы g содержится в множестве $\{X_0^{\mathsf{T}}AX_0 \,|\, X_0 \in k^n\}$ значений формы f; но это действительно так:

$$\{Y_0^{\mathsf{T}}BY_0 \,|\, Y_0 \in k^m\} = \{Y_0^{\mathsf{T}}C^{\mathsf{T}}ACY_0 \,|\, Y_0 \in k^m\} = \\ = \{(CY_0)^{\mathsf{T}}A(CY_0) \,|\, Y_0 \in k^m\} \subseteq \{X_0^{\mathsf{T}}AX_0 \,|\, X_0 \in k^n\}.$$

(4) Если бы форма g не была анизотропна, то существовал бы такой ненулевой столбец $Y_0 = (b_1, \dots, b_n)^{\mathsf{T}}$, что $g(b_1, \dots, b_n) = Y_0^{\mathsf{T}}BY_0$. Но тогда столбец

$(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}} = CY_0$ ненулевой (так как иначе было бы $Y_0 = C^{-1}(CY_0) = 0$), и $f(a_1,\ldots,a_n) = (CY_0)^{\mathrm{T}}A(CY_0) = Y_0^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y_0 = Y_0^{\mathrm{T}}BY_0$, а это значит, что форма f, вопреки предположению, не анизотропна.

(5) Изотропность формы означает, что она невырождена и не анизотропна; поэтому утверждение следует из (2) и (4).

(6) Очевидно.

Предложение 6. *Если квадратичные формы f, f_1 изометричны, и квадратичные формы g, g_1 изометричны, и если существует линейное преобразование переменных (не обязательно невырожденное), переводящее форму f в форму g, то существует линейное преобразование переменных, переводящее форму f_1 в форму g_1.*

Доказательство. По условиям предложения существуют линейные преобразования переменных, осуществляющих следующие трансформации форм:

$$f_1 \to f \to g \to g_1.$$

По предложению 3 их композиция является линейным преобразованием переменных, переводящим форму f_1 в форму g_1.

4°. **Перенумерация переменных.** Пусть

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

– квадратичная форма, и пусть $\sigma \in S_n$ – подстановка множества $\{1,\ldots,n\}$. Тогда

$$x_i = y_{\sigma(i)},\ \ 1 \le i \le n$$

– невырожденное линейное преобразование переменных, и форма

$$g(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

полученная из f этим преобразованием, изометрична f. Ясно, что $a_{ij} = b_{\sigma(i),\sigma(j)}$ для любых индексов i, j. Снова возвращаясь к обозначению переменных буквами $x_1,\ldots,x_n$, мы получаем, что форма f изометрична форме $g(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}$. Мы будем неоднократно пользоваться этим фактом. В частности, если не все коэффициенты формы f равны 0, перенумерацией переменных можно добиться, чтобы ненулевым был или коэффициент a_{11} при x_1^2, или коэффициент $2a_{12} = a_{12} + a_{21}$ при x_1x_2.

§ 3. Приведение квадратичной формы к диагональному виду невырожденным линейным преобразованием переменных

1°. **Приведение квадратичной формы к диагональному виду методом Лапласа.** Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ – квадратичная форма над полем k, характеристика которого отлична от 2; как обычно, мы считаем, что $a_{ij} = a_{ji}$ для всех пар индексов i, j. Мы покажем, что форма f изометрична над k форме вида $\lambda_1y_1^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$ $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in k)$. Доказательство этого, приведенное ниже, является конструктивным: оно позволяет явно построить невырожденное линейное преобразование переменных, переводящее форму f в форму с диагональной матрицей. Алгорифм, приведенный в этом доказательстве, называется методом Лапласа приведения квадратичной формы к диагональному виду.

Квадратную матрицу C будем называть (верхней) унитреугольной матрицей, если все ее элементы, стоящие ниже диагонали, равны 0, а все диагональные элементы равны 1. Определитель унитреугольной матрицы равен 1, и потому все унитреугольные матрицы невырождены.

Лемма 1. *Пусть* $1 \le m \le n$ *и пусть* $a_{11} \ne 0, \dots, a_{mm} \ne 0$, *но* $a_{ij} = 0$ *при* $1 \le i, j \le m$, $i \ne j$. *Тогда существует невырожденное линейное преобразование переменных, матрица которого – верхняя унитреугольная матрица, превращающее форму* f *в ортогональную сумму формы* $a_{11}y_1^2 + \dots + a_{mm}y_m^2$ *и некоторой формы* $g(y_{m+1}, \dots, y_n)$ *от* $n-m$ *переменных.*

Доказательство. Заметим, что по условию леммы для любого s, такого что $1 \le s \le m$, произведения $x_s x_j$ входят в форму f с не обязательно нулевыми коэффициентами лишь когда $j = s$ или $j > m$. Пользуясь тем, что $a_{ss} \ne 0$, выделим в форме $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ квадрат линейной формы, в котором члены, содержащие x_s, будут такими же, как в нашей форме; при этом в квадрате линейной формы окажутся и другие слагаемые, не зависящие от x_s, которые придется вычесть:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{s=1}^{m}(a_{ss}x_s^2 + 2a_{s,m+1}x_s x_{m+1} + \dots + 2a_{sn}x_s x_n) + \sum_{i,j=m+1}^{n} a_{ij}x_i x_j =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} a_{ss}\big(x_s + \frac{a_{s,m+1}}{a_{ss}}x_{m+1} + \dots + \frac{a_{sn}}{a_{ss}}x_n\big)^2 + \sum_{i,j=m+1}^{n} a_{ij}x_i x_j -$$

$$- \sum_{s=1}^{m} a_{ss}\big(\frac{a_{s,m+1}}{a_{ss}}x_{m+1} + \dots + \frac{a_{sn}}{a_{ss}}x_n\big)^2.$$

Обозначим через $g(y_{m+1}, \dots, y_n)$ квадратичную форму

$$\sum_{i,j=m+1}^{n} a_{ij}y_i y_j - \sum_{s=1}^{m} a_{ss}\big(\frac{a_{s,m+1}}{a_{ss}}y_{m+1} + \dots + \frac{a_{sn}}{a_{ss}}y_n\big)^2.$$

Предыдущее равенство показывает, что линейное преобразование переменных

$$x_s = y_s - \frac{a_{s,m+1}}{a_{ss}}y_{m+1} - \dots - \frac{a_{sn}}{a_{ss}}y_n \quad \text{при } 1 \le s \le m, \qquad x_s = y_s \quad \text{при } s > m$$

превращает форму f в ортогональную сумму

$$(a_{11}y_1^2 + \dots + a_{mm}y_m^2) \perp g(y_{m+1}, \dots, y_n).$$

Матрица этого преобразования является, очевидно, верхней унитреугольной, и потому преобразование невырождено.

Лемма 2. *Если* $a_{11} = 0$, *но* $a_{12} = a_{21} \ne 0$, *то форма* f *изометрична ортогональной сумме формы* $y_1^2 - y_2^2$ *и какой-то формы* $g(y_3, \dots, y_n)$ *от* $n-2$ *переменных.*

Доказательство. Форма $w_1 w_2$ невырожденными линейными преобразованиями переменных

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{12} & a_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

превращается в формы $z_1^2 - z_2^2$, $(2a_{12}x_1 + a_{22}x_2)x_2 = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_i x_j$. Поэтому эти две формы изометричны, и существует невырожденное линейное преобразование переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

трансформирующее форму $\sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_i x_j$ в форму $z_1^2 - z_2^2$. Тогда преобразование

$$x_1 = \alpha z_1 + \beta z_2, \ \ x_2 = \gamma z_1 + \delta z_2, \qquad x_s = z_s \quad \text{при } s > 2$$

переводит форму

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}x_ix_j+2x_1\sum_{j=3}^{n}a_{1j}x_j+2x_2\sum_{j=3}^{n}a_{2j}x_j+\sum_{i,j=3}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

в форму

$$z_1^2-z_2^2+2(\alpha z_1+\beta z_2)\sum_{j=3}^{n}a_{1j}z_j+2(\gamma z_1+\delta z_2)\sum_{j=3}^{n}a_{2j}z_j+\sum_{i,j=3}^{n}a_{ij}z_iz_j.$$

Коэффициенты при z_1^2, z_2^2 в этой форме равны соответственно 1, -1, а коэффициент при z_1z_2 равен 0; поэтому по лемме 1 она изометрична форме вида $(y_1^2-y_2^2)\perp g(y_3,\dots,y_n)$.

Теорема 1. *Всякая квадратичная форма $f(x_1,\dots,x_n)$ над полем k, характеристика которого отлична от 2, изометрична над k некоторой квадратичной форме вида $\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$, где $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in k$. Иными словами, для всякой квадратичной формы $f(x_1,\dots,x_n)$ над полем, характеристика которого отлична от 2, существует линейное преобразование переменных*

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}$$

с невырожденной матрицей $C\in k_n$, превращающее форму $f(x_1,\dots,x_n)$ в диагональную квадратичную форму $\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$.

Доказательство. Индукция по числу переменных n. Если f – форма размерности 1 или форма любой размерности с нулевыми коэффициентами, утверждение тривиально: всякая такая форма уже диагональна. Пусть теперь f – форма от $n>1$ переменных, не все коэффициенты которой равны 0, и пусть теорема уже доказана для всех квадратичных форм от меньшего числа переменных. Без ограничения общности можем считать, что $a_{11}\neq 0$ или $a_{11}=0$, $a_{12}\neq 0$ (этого всегда можно добиться перенумерацией переменных). В первом случае по лемме 1 форма f изометрична форме вида $a_{11}z_1^2\perp g(z_2,\dots,z_n)$, во втором по лемме 2 – форме вида $(z_1^2-z_2^2)\perp g_1(z_3,\dots,z_n)$. По предположению индукции формы g, g_1 от меньшего числа переменных изометричны соответственно формам $\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$, $\mu_3y_3^2+\ldots+\mu_ny_n^2$, так что форма f оказывается изометричной форме

$$\lambda_1y_1^2\perp(\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$$

или форме

$$(\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2)\perp(\mu_3y_3^2+\ldots+\mu_ny_n^2)=\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\mu_3y_3^2+\ldots+\mu_ny_n^2,$$

где положено $\lambda_1=a_{11}$, $\mu_1=1$, $\mu_2=-1$.

Поскольку при линейном преобразовании переменных матрица A квадратичной формы преобразуется в матрицу $C^{\mathrm{T}}AC$, теорема 1 допускает переформулировку, в которой вообще не упоминаются квадратичные формы.

Теорема 1$'$. *Пусть k – поле, характеристика которого отлична от 2, и пусть $A\in k_n$ – симметричная матрица с компонентами из k. Тогда существует такая невырожденная матрица $C\in k_n$, что $C^{\mathrm{T}}AC$ – диагональная матрица.*

Замечание. *Теорема перестает быть верной для полей характеристики 2.*

Например, форму x_1x_2 над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2$ нельзя привести к диагональному виду никаким невырожденным линейным преобразованием переменных. Действительно, над этим полем есть всего 6 невырожденных матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},$$

и преобразование с любой из этих матриц приводит форму x_1x_2 к одному из видов y_1y_2, $y_1^2+y_1y_2$, $y_1y_2+y_2^2$.

2°. **Теорема Якоби.** Преобразование произвольной квадратичной формы к диагональному виду, описанное в предыдущем пункте, осуществляется при помощи алгорифмов из лемм 1, 2. Случай, когда удается обойтись только алгорифмом из леммы 1, особенно прост; если форма невырождена, то в этом случае можно явно указать диагональную форму, которой изометрична исходная форма.

Прежде, чем формулировать соответствующий результат, введем некоторые обозначения. Пусть

$$A\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

– квадратная матрица порядка n с компонентами из какого-то коммутативного ассоциативного кольца, и пусть $1\le m\le n$; обозначим через $\Delta_m(A)$ определитель матрицы, составленной из первых m строк и первых m столбцов матрицы A. Таким образом,

$$\Delta_1(A)=a_{11},\ \ \Delta_2(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\ \dots,\ \Delta_m(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mm}\end{vmatrix},\ \dots.$$

Элементы $\Delta_1(A),\Delta_2(A),\dots,\Delta_n(A)$ называются главными диагональными минорами матрицы A.

Лемма 3. *Пусть A, C – квадратные матрицы порядка n, причем C – верхняя унитреугольная матрица, и пусть $1\le m\le n$. Тогда $\Delta_m(C^{\mathsf T}AC)=\Delta_m(A)$.*

Доказательство. Разобьем матрицы A, C на блоки

$$A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C_3&C_4\end{pmatrix}$$

так, чтобы левые верхние блоки A_1 и C_1 были квадратными матрицами порядка m. Поскольку матрица C унитреугольная, ясно, что $C_3=\mathbf{0}$, а матрица C_1 – тоже унитреугольная, и потому $\det C_1=1$. Мы получаем, таким образом, что

$$C^{\mathsf T}AC=\begin{pmatrix}C_1^{\mathsf T}&\mathbf{0}\\C_2^{\mathsf T}&C_4^{\mathsf T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1&C_2\\\mathbf{0}&C_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1^{\mathsf T}A_1C_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix},$$

где через B_2, B_3, B_4 обозначены матрицы, которые, конечно, можно выписать явно, но нам это сейчас не нужно. Мы видим теперь, что

$$\Delta_m(C^{\mathsf T}AC)=\det(C_1^{\mathsf T}A_1C_1)=(\det C_1)^2\det A_1=1\cdot\det A_1=\Delta_m(A).$$

Теорема 2. *Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ – квадратичная форма над полем k, характеристика которого не равна 2, и пусть A – матрица формы f. Если все главные диагональные миноры $\Delta_m(A)$ матрицы A отличны от 0 $(1\le m\le n)$, то форма f изометрична форме $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$, где*

$$\lambda_1=\Delta_1(A),\quad \lambda_m=\Delta_m(A)/\Delta_{m-1}(A)\quad \textit{при}\ \ 2\le m\le n$$

(так что $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m=\Delta_m(A)$ для любого m, $1\le m\le n$).

Доказательство. Индукцией по m докажем следующее утверждение, которое при $m = n$ превращается в утверждение теоремы:

Для всякого m, $0 \le m \le n$, существует такая верхняя унитреугольная матрица $C \in k_n$, что преобразованием $X = CY$ форма f превращается в форму вида

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2 + \sum_{i,j=m+1}^{n} b_{ij} y_i y_j \qquad (b_{ij} \in k).$$

При $m = 0$ утверждение бессодержательно. Пусть $1 \le m \le n$ и уже построена унитреугольная матрица C', такая что преобразование $X = C'Z$ превращает форму f в форму

$$g(z_1, \ldots, z_n) = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_{m-1} z_{m-1}^2 + \sum_{i,j=m}^{n} c_{ij} z_i z_j.$$

Пусть $B = {C'}^{\mathsf{T}} A C'$ – матрица этой формы; матрица, составленная из первых m строк и m столбцов матрицы B является диагональной матрицей с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, c_{mm}$; поэтому ее определитель $\Delta_m(B)$ равен $\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1} c_{mm}$. С другой стороны, из леммы 3 следует, что

$$\Delta_m(B) = \Delta_m({C'}^{\mathsf{T}} A C') = \Delta_m(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_{m-1} \lambda_m,$$

поэтому $c_{mm} = \lambda_m$. По лемме 1, существует линейное преобразование переменных $Z = C''Y$ с унитреугольной матрицей C'', превращающее форму g в форму вида

$$h(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2 + \sum_{i,j=m+1}^{n} b_{ij} y_i y_j.$$

Остается заметить, что произведение $C = C'C''$ верхних унитреугольных матриц C', C'' – снова верхняя унитреугольная матрица, и что преобразование $X = CY (= C'(C''Y) = C'Z)$ трансформирует форму f в форму h.

§ 4. Закон сокращения для квадратичных форм

1°. **Признак изометричности форм.** Мы начнем этот параграф с одного достаточного условия изометричности квадратичных форм, чуть-чуть более слабого, чем определение изометричности.

Лемма 1. *Всякая квадратичная форма над полем, характеристика которого не равна 2, изометрична ортогональной сумме невырожденной квадратичной формы и формы с нулевыми коэффициентами.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем k, характеристика которого не равна 2. По теореме 3.1 она изометрична над k форме вида $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$. Изменим нумерацию переменных y_i так, чтобы первые r коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ были ненулевыми, а остальные коэффициенты $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ были равны 0 ($0 \le r \le n$). Тогда форма $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2$ – невырожденная форма ранга r, и форма f изометрична форме

$$(\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2) \perp (\lambda_{r+1} y_{r+1}^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2) = (\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2) \perp (0 \cdot y_{r+1}^2 + \ldots + 0 \cdot y_n^2).$$

Предложение 1. *Если формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_n)$ имеют одинаковый ранг, и существует линейное преобразование переменных (не обязательно невырожденное), переводящее первую форму во вторую, то формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_n)$ изометричны.*

Доказательство. По лемме 1 формы f и g изометричны формам $f = f_1 \perp f_2$, $g = g_1 \perp g_2$, где f_1, g_1 – невырожденные формы, а f_2, g_2 – формы с нулевыми коэффициентами. Пусть r – общее значение ранга форм f и g; поскольку ранг ортогональной суммы равен сумме рангов слагаемых, а ранг формы с нулевыми коэффициентами равен 0, мы находим, что $r(f_1) = r(f) = r$, $r(g_1) = r(g) = r$. Пусть A_1 и B_1 – матрицы форм f_1, g_1; это квадратные невырожденные матрицы порядка r. Матрицы форм f, g имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0}_{r\times s} \\ \mathbf{0}_{s\times r} & \mathbf{0}_{s\times s} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0}_{r\times s} \\ \mathbf{0}_{s\times r} & \mathbf{0}_{s\times s} \end{pmatrix},$$

где через s обозначена разность $n - r$. По условию, существует матрица (не обязательно невырожденая)

$$C' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \in k_n \qquad (C_1 \in k_r,\ \ C_4 \in k_s),$$

такая что $B = C'^{\mathsf{T}} A C'$, т.е.

$$\begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{\mathsf{T}} & C_3^{\mathsf{T}} \\ C_2^{\mathsf{T}} & C_4^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{\mathsf{T}} A_1 C_1 & C_1^{\mathsf{T}} A_1 C_2 \\ C_2^{\mathsf{T}} A_1 C_1 & C_2^{\mathsf{T}} A_1 C_2 \end{pmatrix}.$$

В частности, $B_1 = C_1^{\mathsf{T}} A_1 C_1$; все матрицы B_1, C_1, A_1 – квадратные матрицы порядка r, причем матрица B_1 невырождена, а потому не может быть вырожденной и матрица C_1. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_s \end{pmatrix}$$

– невырожденная матрица порядка $n = r + s$, и

$$C^{\mathsf{T}} A C = \begin{pmatrix} C_1^{\mathsf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{\mathsf{T}} A_1 C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = B.$$

Таким образом, формы f и g, матрицами которых являются матрицы A и B, изометричны.

2°. **Закон сокращения.** Мы видели в предыдущем параграфе, что каждая квадратичная форма над полем, характеристика которого не равна 2, изометрична некоторой форме с диагональной матрицей. Конечно, эта диагональная форма не единственна. Однако, выполняется следующее свойство, которое, как мы увидим ниже, может рассматриваться как очень слабая форма теоремы единственности.

Теорема 1 (закон сокращения для квадратичных форм). *Пусть $f(x_1, \ldots, x_m)$, $f'(x'_1, \ldots, x'_m)$, $g(y_1, \ldots, y_n)$, $h(z_1, \ldots, z_n)$ – квадратичные формы над полем k, характеристика которого не равна 2. Если формы f, f' изометричны, и формы $f \perp g$, $f' \perp h$ изометричны, то и формы g и h изометричны.*

Доказательство. Форма $f' \perp h$ изометрична форме $f \perp h$; поэтому формы $f \perp g$ и $f \perp h$ изометричны, а значит, их ранги равны. Но ранг ортогональной суммы равен сумме рангов слагаемых, и поэтому ранги форм g и h равны.

Рассмотрим сначала случай, когда форма $f(x) = \lambda x^2$ одномерна. Обозначим матрицы форм g, h через A и B; тогда матрицы ортогональных сумм $f \perp g$, $f \perp h$ имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Поскольку формы $f \perp g$ и $f \perp h$ изометричны, существует такая матрица

$$C_1 = \begin{pmatrix} c & u \\ v^{\mathsf{T}} & C \end{pmatrix},$$

что $C_1^{\mathsf T} A_1 C_1 = B_1$ (через u и v обозначены какие-то строки длины $n-1$, состоящие из элементов поля k). Не ограничивая общности, будем считать, что $c \neq 1$ (если это не так, то просто заменим матрицу C_1 на матрицу $-C_1$). Мы имеем:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & v \\ u^{\mathsf T} & C^{\mathsf T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & u \\ v^{\mathsf T} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2\lambda + vAv^{\mathsf T} & c\lambda u + vAC \\ c\lambda u^{\mathsf T} + C^{\mathsf T}Av^{\mathsf T} & \lambda u^{\mathsf T} u + C^{\mathsf T}AC \end{pmatrix};$$

сравнивая соответствующие компоненты матриц, находим, что

$$c^2\lambda + vAv^{\mathsf T} = \lambda, \qquad c\lambda u + vAC = 0\,,$$
$$c\lambda u^{\mathsf T} + C^{\mathsf T}Av^{\mathsf T} = 0\,, \qquad \lambda u^{\mathsf T}u + C^{\mathsf T}AC = B\,,$$

и потому $vAv^{\mathsf T} = \lambda(1-c^2)$, $vAC = -c\lambda u$, $C^{\mathsf T}Av^{\mathsf T} = -c\lambda u^{\mathsf T}$.

Положим $D = C + \dfrac{v^{\mathsf T}u}{1-c}$; тогда прямое вычисление с использованием полученных только что соотношений показывает, что

$$D^{\mathsf T}AD = C^{\mathsf T}AC + \frac{C^{\mathsf T}Av^{\mathsf T}u}{1-c} + \frac{u^{\mathsf T}vAC}{1-c} + \frac{u^{\mathsf T}vAv^{\mathsf T}u}{(1-c)^2} = C^{\mathsf T}AC - \frac{(c\lambda u^{\mathsf T})u}{1-c} - \frac{u^{\mathsf T}(c\lambda u)}{1-c} +$$
$$+ \frac{u^{\mathsf T}\lambda(1-c^2)u}{(1-c)^2} = C^{\mathsf T}AC + \lambda u^{\mathsf T}u\Big(-\frac{c}{1-c} - \frac{c}{1-c} + \frac{1-c^2}{(1-c)^2}\Big) = C^{\mathsf T}AC + \lambda u^{\mathsf T}u = B.$$

Полученное равенство означает, что форма g, матрица которой равна B, может быть получена из формы f, матрица которой равна A, при помощи линейного преобразования переменных, не обязательно невырожденного. Но, как мы заметили ранее, g и h – формы одинакового ранга, поэтому по предложению 1 они изометричны. Этим завершается доказательство теоремы для случая $m = 1$.

Общий случай легко сводится к уже рассмотренному. Действительно, по теореме 3.1 форма f изометрична форме вида

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_m x_m^2 = \lambda_1 x_1^2 \perp \lambda_2 x_2^2 \perp \ldots \perp \lambda_m x_m^2.$$

Поэтому формы

$$\lambda_1 x_1^2 \perp \lambda_2 x_2^2 \perp \ldots \perp \lambda_m x_m^2 \perp g, \qquad \lambda_1 x_1^2 \perp \lambda_2 x_2^2 \perp \ldots \perp \lambda_m x_m^2 \perp h$$

изометричны, и применяя m раз уже доказанный случай теоремы сокращения, мы последовательно получим, что изометричны следующие пары форм:

$\lambda_2 x_2^2 \perp \ldots \perp \lambda_m x_m^2 \perp g$ и $\lambda_2 x_2^2 \perp \ldots \perp \lambda_m x_m^2 \perp h$; $\ldots$; $\lambda_m x_m^2 \perp g$ и $\lambda_m x_m^2 \perp h$; g и h.

3°. **Закон инерции для квадратичных форм над полем вещественных чисел.** В этом и следующем пунктах даются применения закона сокращения к формам над некоторыми конкретными полями.

Теорема 2 (закон инерции для вещественных квадратичных форм). *Пусть квадратичная форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ изометрична над $\mathbb{R}$ формам*

$$g(y_1,\ldots,y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_s y_s^2 - \lambda_{s+1} y_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} y_{s+t}^2,$$
$$h(z_1,\ldots,z_n) = \mu_1 z_1^2 + \cdots + \mu_u z_u^2 - \mu_{u+1} z_{u+1}^2 - \ldots - \mu_{u+v} z_{u+v}^2,$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\lambda_{s+1},\ldots,\lambda_{s+t};\mu_1,\ldots,\mu_u,\mu_{u+1},\ldots,\mu_{u+v}$ – положительные вещественные числа. Тогда $s = u$, $t = v$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что ранги форм g и h равны соответственно $s+t$ и $u+v$; но эти формы изометричны, поэтому их ранги равны. Таким образом, $s+t = u+v$, и нам достаточно доказать, что $s = u$. Пусть для определенности $s \le u$; сведем к противоречию предположение $s < u$.

Если $\lambda, \mu > 0$, то форма λy^2 трансформируется в форму μz^2 преобразованием $y = (\sqrt{\mu/\lambda})z$ и потому формы λy^2, μz^2 изометричны. Поэтому формы

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_s y_s^2 = \lambda_1 y_1^2 \perp \ldots \perp \lambda_s y_s^2, \qquad \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_s z_s^2 = \mu_1 z_1^2 \perp \ldots \perp \mu_s z_s^2$$

изометричны. Применяя закон сокращения к изометричным формам g, h и их изометричным ортогональным слагаемым $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_s y_s^2$, $\mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_s z_s^2$ мы получаем, что изометричны и формы

$$g'(y_{s+1}, \ldots, y_n) = -\lambda_{s+1} y_{s+1}^2 - \ldots - \lambda_{s+t} y_{s+t}^2,$$
$$h'(z_{s+1}, \ldots, z_n) = \mu_{s+1} z_{s+1}^2 + \cdots + \mu_u z_u^2 - \mu_{u+1} z_{u+1}^2 - \ldots - \mu_{u+v} z_{u+v}^2.$$

Но это невозможно при $s < u$, так как множества значений изометричных форм совпадают, $h'(1, 0, \ldots, 0) = \mu_{s+1} > 0$, а все значения формы g', очевидно, не положительны.

Следствие. *Для всякой квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ существуют единственные числа s, r, такие что $0 \leq s \leq r \leq n$ и форма f изометрична над $\mathbb{R}$ форме*

$$g(y_1, \ldots, y_n) = y_1^2 + \ldots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \ldots - y_r^2.$$

Доказательство. Единственность следует из закона инерции; докажем, что для формы f такие r, s существуют. По теореме 3.1 форма f изометрична форме вида

$$h(z_1, \ldots, z_n) = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2.$$

Занумеруем переменные $z_1, \ldots, z_n$ так, что

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_s > 0, \ \ \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_r < 0, \ \ \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0 \quad (0 \leq s \leq r \leq n).$$

Преобразование $z_i = y_i/\sqrt{|\lambda_i|}$ при $1 \leq i \leq r$, $y_i = z_i$ при $r < i \leq n$ превращает форму $h(z_1, \ldots, z_n)$ в форму

$$g(y_1, \ldots, y_n) = y_1^2 + \ldots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \ldots - y_r^2.$$

4°. **Квадратичные формы над полем из p элементов.** Пусть p – нечетное простое число, и пусть $\mathbb{F}_p$ – поле вычетов по модулю p. Напомним, что всякий ненулевой элемент этого поля является либо классом квадратичных вычетов по модулю p, и тогда он – квадрат некоторого элемента из $\mathbb{F}_p$, либо классом квадратичных невычетов, и тогда он – не квадрат в $\mathbb{F}_p$. Напомним еще, что произведение и частное двух классов квадратичных невычетов является классом квадратичных вычетов (мультипликативность символа квадратичного вычета); поэтому произведение и частное двух элементов поля $\mathbb{F}_p$, которые не являются квадратами, представляет собой квадрат некоторого элемента из $\mathbb{F}_p$.

Лемма 2. *Всякий элемент поля $\mathbb{F}_p$ представим в виде суммы двух квадратов элементов этого поля.*

Доказательство. Пусть u – наименьшее из чисел $1, 2, \ldots, p-1$, которое является квадратичным невычетом по модулю p; тогда $u - 1$ – квадратичный вычет, и существует такое целое число v, что $v^2 \equiv u - 1 \pmod p$. Обозначим через β и γ классы вычетов по модулю p целых чисел u, v. Тогда β не является квадратом в $\mathbb{F}_p$, но $\beta = \gamma^2 + 1$. Если теперь α – произвольный элемент из $\mathbb{F}_p$, не являющийся квадратом, то, как мы напомнили выше, существует элемент $\delta \in \mathbb{F}_p$, такой что $\alpha = \beta\delta^2$, и тогда $\alpha = (\gamma\delta)^2 + \delta^2$. Если же α – квадрат некоторого элемента $\delta \in \mathbb{F}_p$, то $\alpha = \delta^2 + 0^2$.

Лемма 3. *Для любого $\alpha \in \mathbb{F}_p$, $\alpha \neq 0$ квадратичная форма $\alpha y_1^2 + \alpha y_2^2$ изометрична квадратичной форме $x_1^2 + x_2^2$.*

Доказательство. По предыдущей лемме существуют такие $\gamma, \delta \in \mathbb{F}_p$, что $\alpha = \gamma^2 + \delta^2$; тогда преобразование

$$x_1 = \gamma y_1 + \delta y_2, \qquad x_2 = -\delta y_1 + \gamma y_2$$

превращает форму $x_1^2+x_2^2$ в форму

$$(\gamma y_1+\delta y_2)^2+(-\delta y_1+\gamma y_2)^2=(\gamma^2 y_1^2+2\gamma\delta y_1 y_2+\delta^2 y_2^2)+(\delta^2 y_1^2-2\gamma\delta y_1 y_2+\gamma^2 y_2^2)=$$
$$=(\gamma^2+\delta^2)y_1^2+(\gamma^2+\delta^2)y_2^2=\alpha y_1^2+\alpha y_2^2.$$

Теорема 3. *Пусть p – нечетное простое число, $\mathbb{F}_p$ – поле вычетов по модулю p, и пусть $\alpha\in\mathbb{F}_p$ – элемент, не являющийся квадратом никакого элемента из $\mathbb{F}_p$. Тогда всякая квадратичная форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ над полем $\mathbb{F}_p$, ранг которой равен r, изометрична над $\mathbb{F}_p$ одной и только одной из двух форм:*

$$y_1^2+\ldots+y_{r-1}^2+y_r^2,\qquad y_1^2+\ldots+y_{r-1}^2+\alpha y_r^2.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай форм от одной переменной. Такая форма либо является формой с нулевым коэффициентом, либо имеет вид λx^2, где $\lambda\neq 0$. Если $\lambda=\delta^2$ для некоторого элемента $\delta\in\mathbb{F}_p$, то преобразование $x=y/\delta$ приводит форму $\lambda x^2=\delta^2x^2$ к виду y^2. В противном случае существует элемент $\delta\in\mathbb{F}_p$, такой что $\lambda=\alpha\delta^2$, и то же преобразование $x=y/\delta$ приводит форму $\lambda x^2=\alpha\delta^2x^2$ к виду αy^2. Если форма λy^2 изометрична форме x^2, то она получается из x^2 некоторым преобразованием $x=\gamma y$, и потому $\lambda=\gamma^2\neq\alpha$; следовательно, формы x^2, αy^2 не изометричны.

По теореме 3.1, квадратичная форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ ранга r изометрична ортогональной сумме r форм ранга 1, каждая из которых изометрична одной из форм y_i^2, αy_i^2. По лемме 3 сумму $\alpha y_i^2+\alpha y_j^2$ двух форм второго типа можно заменить на изометричную ей форму $y_i^2+y_j^2$. Поэтому можно считать, что среди форм ранга 1, ортогональной сумме которых изометрична форма f, не более одной имеет вид αy_j^2, а остальные равны y_i^2. Этим и доказано, что форма f изометрична одной из форм:

$$y_1^2+\ldots+y_{r-1}^2+y_r^2,\qquad y_1^2+\ldots+y_{r-1}^2+\alpha y_r^2.$$

Если бы эти формы были изометричны, то по закону сокращения были бы изометричны формы от одной переменной y_r^2, αy_r^2, что, как мы видели, не так.

§ 5. Приведение вещественной квадратичной формы к диагональному виду преобразованием с ортогональной матрицей

1°. **Ортогональные матрицы.** Пусть $C\in\mathbb{R}_n$ – вещественная квадратная матрица порядка n. Она называется ортогональной, если $C^{\mathsf T}C=E$. Из этого условия следует, что матрица C невырождена, так как иначе ее ранг был бы строго меньше n и мы получили бы неверное соотношение

$$n=\operatorname{rank}E=\operatorname{rank}C^{\mathsf T}C\le\operatorname{rank}C<n.$$

Поэтому ортогональная матрица обратима, и $C^{-1}=EC^{-1}=C^{\mathsf T}CC^{-1}=C^{\mathsf T}$. В частности, если C – ортогональная матрица, то $CC^{\mathsf T}=CC^{-1}=E$. Точно так же показывается, что если $C\in\mathbb{R}_n$ и $CC^{\mathsf T}=E$, то матрица C обратима, обратная к ней матрица равна C^{-1} и $C^{\mathsf T}C=E$, т.е. матрица C ортогональна.

Предложение 1. *Единичная матрица, матрица, обратная к ортогональной матрице, матрица, полученная транспонированием ортогональной матрицы, а так же произведение ортогональных матриц одинакового порядка – снова ортогональные матрицы.*

Доказательство. Если C, D – ортогональные матрицы одинакового порядка, то $C^{\mathsf T}C=E$, $D^{\mathsf T}D=E$, а потому $(CD)^{\mathsf T}(CD)=D^{\mathsf T}C^{\mathsf T}CD=D^{\mathsf T}ED=D^{\mathsf T}D=E$, а это значит, что CD – ортогональная матрица. Если C – ортогональная матрица, то $C^{-1}=C^{\mathsf T}$, и $(C^{-1})^{\mathsf T}C^{-1}=(C^{\mathsf T})^{\mathsf T}C^{-1}=CC^{-1}=E$, и потому $C^{-1}=C^{\mathsf T}$ – ортогональная матрица. Наконец, $E^{\mathsf T}E=E\cdot E=E$, т.е. E – тоже ортогональная матрица.

Это предложение, в частности, означает, что ортогональные матрицы фиксированного порядка составляют группу относительно обычного умножения матриц.

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

– ортогональная матрица. Равенство $C^{\mathsf{T}}C = E$, что при $1 \le i, j \le n$

$$\sum_{s=1}^{n} (C^{\mathsf{T}})_{is}(C)_{sj} = \sum_{s=1}^{n} c_{si}c_{sj} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \ne j, \end{cases}$$

т.е. сумма квадратов элементов каждого столбца ортогональной матрицы C равна 1, а сумма произведений элементов любого столбца на соответствующие элементы другого столбца равна 0. Аналогичные соотношения для элементов строк ортогональной матрицы

$$\sum_{s=1}^{n} c_{is}c_{js} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \ne j \end{cases}$$

вытекают из равенства $CC^{\mathsf{T}} = E$.

Лемма 1. *Пусть $m < n$ и пусть $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – такая матрица, что $C^{\mathsf{T}}C = E_m$. Тогда к этой матрице можно добавить еще один столбец так, чтобы для получившейся матрицы C_1 выполнялось соотношение $C_1^{\mathsf{T}}C_1 = E_{m+1}$.*

Доказательство. Однородная система линейных уравнений

$$C^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

число уравнений в которой меньше числа переменных, имеет нетривиальное решение $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Поскольку $a_1, a_2, \dots, a_n$ – вещественные числа, не все равные 0, сумма их квадратов d строго больше 0; положим $b_i = a_i/\sqrt{d}$ $(1 \le i \le n)$, и обозначим через B столбец $(b_1, b_2, \dots, b_n)^{\mathsf{T}}$. Тогда $b_1^2 + \ldots + b_n^2 = (a_1^2 + \ldots + a_n^2)/d = 1$, и потому

$$B^{\mathsf{T}}B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1.$$

Кроме того, $C^{\mathsf{T}}B = \mathbf{0}$ и потому $B^{\mathsf{T}}C = (C^{\mathsf{T}}B)^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}$. Матрица $C_1 = (C|B)$ удовлетворяет требованию леммы:

$$C_1^{\mathsf{T}}C_1 = \begin{pmatrix} C^{\mathsf{T}} \\ B^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{\mathsf{T}}C & C^{\mathsf{T}}B \\ B^{\mathsf{T}}C & B^{\mathsf{T}}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = E_{m+1}.$$

Предложение 2. *Пусть $m < n$ и пусть $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – такая матрица, что $C^{\mathsf{T}}C = E_m$. Тогда существует такая матрица $D \in \mathbb{R}^{n\times(m-n)}$, что $(C|D)$ – ортогональная матрица.*

Доказательство. Достаточно применить $n - m$ раз лемму 1.

Следствие. *Для всякого столбца, состоящего из вещественных чисел, сумма квадратов которых равна 1, существует ортогональная матрица, для которой этот столбец является первым столбцом.*

2°. **Характеризация ортогональных преобразований переменных.** Линейные преобразования переменных с ортогональными матрицами называются ортогональными преобразованиями переменных. Их важность в теории квадратичных форм определяется следующим фактом.

Предложение 3. *Матрица $C \in \mathbb{R}_n$ ортогональна тогда и только тогда, когда линейное преобразование переменных $(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} = C(y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ переводит чистую сумму квадратов $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ в чистую сумму квадратов $g(y_1, \ldots, y_n) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$.*

Доказательство. Поскольку матрицы обеих форм f и g равны единичной матрице, наше линейное преобразование переводит форму f в форму g тогда и только тогда, когда $C^{\mathrm{T}}EC = E$, т.е. $C^{\mathrm{T}}C = E$, а это и значит, что C – ортогональная матрица.

3°. **Приведение квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогонального преобразования переменных.**

Теорема 1. *Для всякой вещественной квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует преобразование переменных $(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} = C(y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ с ортогональной матрицей C, которое приводит форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ к диагональной форме $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$. Коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ этой диагональной формы являются корнями характеристического многочлена $\chi_A(t)$ матрицы A квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ (с учетом кратности корней) и потому определены формой $f(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно с точностью до порядка.*

Как и большинство утверждений о квадратичных формах, теорему 1 можно переформулировать так, чтобы квадратичные формы в ней вообще не упоминались.

Теорема 1′. *Пусть A – симметричная квадратная матрица порядка n с вещественными компонентами. Тогда существует такая ортогональная матрица C порядка n, что матрица $B = C^{\mathrm{T}}AC$ диагональна. При этом диагональные элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы B являются корнями характеристического многочлена $\chi_A(t)$ матрицы A (с учетом кратности корней) и потому определены матрицей A однозначно с точностью до порядка.*

Доказательство. Мы будем доказывать теорему в ее матричной формулировке, т.е. теорему 1′. Докажем сначала последнее утверждение. Поскольку матрица C ортогональна, транспонированная к ней матрица C^{T} совпадает с обратной матрицей C^{-1}, и потому $B = C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC$. Поэтому, по предложению V.7.2, характеристические многочлены матриц A и B совпадают. Но B – диагональная матрица, и ее характеристический многочлен легко считается:

$$\chi_B(t) = |B - tE| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - t & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n - t \end{vmatrix} = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \ldots (\lambda_n - t).$$

Таким образом, диагональные элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы B являются корнями $\chi_B(t) = \chi_A(t)$, взятыми каждый столько раз, какова его кратность.

Нам осталось доказать существование ортогональной матрицы C, такой что матрица $C^{\mathrm{T}}AC$ диагональна. Это будет сделано в следующих пунктах.

4°. **Лемма о корнях многочлена $\chi_A(t)$.** Следующее утверждение играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1′.

Лемма 2. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – корень характеристического многочлена симметричной вещественной матрицы A порядка n. Тогда $\lambda \in \mathbb{R}$ и существуют такие вещественные числа $c_1, \ldots, c_n$, что $c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 1$ и*

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Иными словами, нам нужно доказать, что число λ вещественно и что существует такое вещественное решение $c_1, \ldots, c_n$ однородной системы линейных уравнений $(A - \lambda E)X = 0$, что $c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 1$. Поскольку λ – корень многочлена $\chi_A(t) = \det(A - tE)$, определитель матрицы $A - \lambda E$ равен 0, и поэтому система $(A - \lambda E)X = 0$ имеет нетривиальное решение, т.е. существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, не все равные 0 и такие что

$$(A - \lambda E) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{или, иначе,} \qquad A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим для краткости столбец $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^n$ через X_0; тогда предыдущее равенство примет вид $AX_0 = \lambda X_0$. Транспонируем обе его части и заменим все компоненты получившихся матриц на комплексно сопряженные; поскольку матрица A симметричная и вещественная, эти преобразования оставят ее неизменной. Таким образом, получится соотношение $\bar{X}_0^{\mathsf{T}} \bar{A}^{\mathsf{T}} = \bar{X}_0^{\mathsf{T}} A = \bar{\lambda} \bar{X}_0^{\mathsf{T}}$. Мы имеем теперь:

$$\bar{\lambda}(\bar{X}_0^{\mathsf{T}} X_0) = (\bar{\lambda} \bar{X}_0^{\mathsf{T}}) X_0 = (\bar{X}_0^{\mathsf{T}} A) X_0 = \bar{X}_0^{\mathsf{T}} (A X_0) = \bar{X}_0^{\mathsf{T}} (\lambda X_0) = \lambda (\bar{X}_0^{\mathsf{T}} X_0).$$

Но $\bar{X}_0^{\mathsf{T}} X_0 = \bar{\alpha}_1 \alpha_1 + \ldots + \bar{\alpha}_n \alpha_n = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 \neq 0$, так как хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0; поэтому из предыдущего равенства следует, что $\bar{\lambda} = \lambda$, т.е. λ – вещественное число.

Поскольку вырожденная матрица $A - \lambda E$ оказалась вещественной, однородная система $(A - \lambda E)X = 0$ имеет нетривиальное вещественное решение $d_1, \ldots, d_n$. Среди чисел d_i есть ненулевые, и потому число $d = d_1^2 + \ldots + d_n^2$ положительное. Положим $c_i = d_i / \sqrt{d}$; тогда числа $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ тоже составляют решение системы $(A - \lambda E)X = 0$, и, кроме того, $c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 1$. Лемма доказана.

5°. **Завершение доказательства теоремы 1′.** . Напомним, что нам осталось доказать, что если A – вещественная симметричная матрица порядка n, то существует такая ортогональная матрица C порядка n, что матрица $C^{\mathsf{T}} A C$ диагональна. Будем это доказывать индукцией по n. Случай $n = 1$ бессодержателен: всякая квадратная матрица порядка 1 диагональна. Пусть A – матрица порядка $n > 1$ и пусть для матриц порядка $(n-1)$ утверждение уже доказано. Степень характеристического многочлена матрицы A равна $n \neq 0$, и потому у этого многочлена есть хотя бы один корень $\lambda \in \mathbb{C}$. По лемме 2 $\lambda \in \mathbb{R}$ и существуют такие числа $c_1, \ldots, c_n$, что $c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 1$ и

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Далее, по следствию предложения 2 существует ортогональная матрица

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_2 & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

первый столбец которой составлен из чисел $c_1, \ldots, c_n$. Из ортогональности матрицы D следуют, в частности, соотношения

$$c_{1i}c_1 + c_{2i}c_2 + \ldots + c_{ni}c_n = 0 \qquad (2 \le i \le n).$$

Пользуясь ими, сосчитаем первый столбец матрицы $A_1 = D^{\mathtt{T}}AD$ (который равен, очевидно, произведению матрицы $D^{\mathtt{T}}A$ на первый столбец матрицы D):

$$\left(D^{\mathtt{T}}A\right)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix} = D^{\mathtt{T}}\left(A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}c_1 & c_2 & \ldots & c_n\\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn}\end{pmatrix}\left(\lambda\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \lambda\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & \ldots & c_n\\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $D^{\mathtt{T}}AD$, которая симметрична вместе с матрицей A, имеет вид

$$D^{\mathtt{T}}AD = \begin{pmatrix}\lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_2\end{pmatrix},$$

где A_2 – симметричная матрица порядка $n-1$.

По индукционному предположению, существует ортогональная матрица C_2, такая что $C_2^{\mathtt{T}}A_2C_2$ – диагональная матрица. Обозначим через C_1 блочно-диагональную матрицу с диагональными блоками (1), C_2, и покажем, что C_1 – ортогональная матрица; в самом деле,

$$C_1^{\mathtt{T}}C_1 = \begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_2\end{pmatrix}^{\mathtt{T}}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_2^{\mathtt{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_2^{\mathtt{T}}C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & E_{n-1}\end{pmatrix} = E_n.$$

Произведение $C = DC_1$ двух ортогональных матриц – снова ортогональная матрица, и матрица

$$C^{\mathtt{T}}AC = C_1^{\mathtt{T}}(D^{\mathtt{T}}AD)C_1 = \begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_2^{\mathtt{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C_2^{\mathtt{T}}AC_2\end{pmatrix}$$

диагональна вместе с матрицей $C_2^{\mathtt{T}}AC_2$. Именно такую матрицу C нам и надо было построить.

§ 6. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы

1°. **Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы.** Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем вещественных чисел называется положительно определенной, если для любых вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$, не все из которых равны 0, значение $f(a_1, \ldots, a_n)$ этой формы положительно. Аналогично, форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется отрицательно определенной, если для любых вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$, не все из которых равны 0, значение $f(a_1, \ldots, a_n)$ этой формы отрицательно.

Из этого определения, в частности, следует, что если $f(x_1, \ldots, x_n)$ – положительно или отрицательно определенная квадратичная форма, и хотя бы одно из чисел $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ отлично от 0, то $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$; таким образом, положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы анизотропны и потому невырождены. Заметим еще, что форма g, изометричная положительно (отрицательно) определенной форме f сама положительно (отрицательно) определена; действительно, форма g анизотропна вместе с формой f, а множество ее ненулевых значений совпадает с множеством ненулевых значений формы f и состоит только из положительных (отрицательных) чисел.

Предложение 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$, и она отрицательно определена тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$.*

Доказательство. Если $\lambda_i \leq 0$ для какого-то i ($1 \leq i \leq n$), то

$$\lambda_1 \cdot 0^2 + \ldots + \lambda_i \cdot 1^2 + \ldots + \lambda_n \cdot 0^2 = \lambda_{s+1} \leq 0,$$

так что форма $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ не положительно определенная. Если же все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ положительны, то для любых вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$, среди которых найдется число $a_i \neq 0$, мы получим, что

$$\lambda_1 a_1^2 + \ldots + \lambda_i a_i^2 + \ldots + \lambda_n a_n^2 \geq \lambda_i a_i^2 > 0,$$

а это значит, что форма $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ положительно определена. Для отрицательно определенных форм утверждение доказывается аналогично.

Замечание. *Форма $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ с положительными $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ положительно определена, лишь если она рассматривается как форма только от $x_1, \ldots, x_n$; форма же $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ не является положительно определенной.*

Предложение 2. *Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда она изометрична форме $y_1^2 + \ldots + y_n^2$.*

Доказательство. По предложению 1 форма $g(y_1, \ldots, y_n) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$ положительно определена; поэтому всякая изометричная ей форма f положительно определена. Обратно, пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – положительно определенная квадратичная форма; по теореме 3.1 она изометрична форме вида

$$h(z_1, \ldots, z_n) = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2.$$

При этом форма h вместе с формой f положительно определена; тогда по предложению 1 $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$. Остается заметить, что преобразование

$$z_i = y_i / \sqrt{\lambda_i} \qquad \text{для всех } i, \ 1 \leq i \leq n$$

превращает форму h в форму $g(y_1, \ldots, y_n) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$.

Следствие 1. *Любые положительно (отрицательно) определенные формы одинакового ранга изометричны.*

Доказательство. Если f_1 и f_2 – положительно определенные формы ранга n, то по предложению 2 они обе изометричны форме $y_1^2 + \ldots + y_n^2$.

Следствие 2. *Определитель матрицы положительно определенной квадратичной формы положителен.*

Доказательство. Если форма f положительно определена, то она получается из формы $y_1^2 + \ldots + y_n^2$ при помощи некоторого невырожденного вещественного линейного преобразования переменных; пусть C – матрица этого преобразования. Поскольку матрицей формы $y_1^2 + \ldots + y_n^2$ является единичная матрица, матрица A формы f равна $C^{\mathrm{T}} E C = C^{\mathrm{T}} C$, и

$$\det A = \det(C^{\mathrm{T}} C) = \det C^{\mathrm{T}} \det C = (\det C)^2 > 0.$$

2°. **Признак Якоби положительной определенности квадратичной формы.** В §2 была доказана теорема Якоби, позволяющая в некоторых случаях находить диагональную форму, изометричную заданной квадратичной форме, не конструируя невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее форму к диагональному виду. Эта теорема дает красивый и важный признак положительной определенности квадратичной формы.

Теорема 1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – вещественная квадратичная форма, и пусть A – ее матрица. Для того чтобы форма f была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы у матрицы A все главные миноры $\Delta_1(A)$, $\Delta_2(A), \ldots, \Delta_n(A)$ были положительны.*

Доказательство. Достаточность. Если все числа $\Delta_i(A)$ $(1 \le i \le n)$ положительны, то положительны и числа

$$\lambda_1 = \Delta_1(A),\ \ \lambda_2 = \Delta_2(A)/\Delta_1(A),\ \ \ldots,\ \ \lambda_n = \Delta_n(A)/\Delta_{n-1}(A).$$

По теореме Якоби форма f изометрична форме $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, которая положительно определена по предложению 1.

Необходимость. Пусть $f_m(x_1, \ldots, x_m)$ – форма, получающаяся из положительно определенной формы $f(x_1, \ldots, x_m)$ приравниванием 0 последних $n - m$ переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ $(1 \le m \le n)$. Из определения положительно определенной формы сразу следует, что все формы f_m положительно определены, и поэтому положительны определители их матриц (см. следствие 2 предложения 2). Но ясно, что определителем матрицы формы f_m является число $\Delta_m(A)$.

3°. **Одновременное приведение пары квадратичных форм.** Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ – две квадратичные формы от одних и тех же переменных. Невырожденным линейным преобразованием переменных $X = CY$ они приводятся к формам $f'(y_1, \ldots, y_n)$, $g'(y_1, \ldots, y_n)$. Естествен вопрос: можно ли выбрать преобразование так, чтобы обе формы f', g' были устроены просто? В частности, можно ли добиться того, чтобы обе формы стали диагональными? В общем случае это не так; однако, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичные формы над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, одна из которых положительно определена. Тогда обе формы одним и тем же вещественным линейным преобразованием переменных могут быть приведены к диагональному виду.*

Доказательство. Пусть, например, форма f положительно определена. Тогда существует вещественное невырожденное линейное преобразование переменных $X = DZ$, которое приводит форму f к чистой сумме квадратов $f_1(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$. Обозначим через $g_1(z_1, \ldots, z_n)$ квадратичную форму, в которую переходит при том же преобразовании форма g. Существует ортогональное преобразование $Z = CY$, превращающее вещественную квадратичную форму g_1 в диагональную форму $g_2(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$. Поскольку ортогональные преобразования превращают чистую сумму квадратов в чистую сумму квадратов, в результате преобразования $Z = CY$ форма f_1 перейдет в форму $f_2(y_1, \ldots, y_n) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$. Таким образом, невырожденное вещественное линейное преобразование $X = (CD)Y$ превращает формы f, g в диагональные формы

$$y_1^2 + \ldots + y_n^2, \qquad \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

4°. **Анизотропные вещественные квадратичные формы.** Следующее простое утверждение показывает, что над полем вещественных чисел нет анизотропных форм, кроме положительно определенных и отрицательно определенных.

Предложение 3. *Всякая анизотропная квадратичная форма над $\mathbb{R}$ от $n \geq 1$ переменных или положительно определена, или отрицательно определена.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – анизотропная квадратичная форма над полем вещественных чисел. По теореме 3.1 она изометрична форме вида

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

которая тоже анизотропна. Как и выше, занумеруем переменные $y_1, \ldots, y_n$ так, что

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_s > 0, \ \ \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_t < 0, \ \ \lambda_{t+1} = \ldots = \lambda_n = 0 \quad (0 \leq s \leq t \leq n).$$

Если $t < n$, то $g(0, \ldots, 0, 1) = \lambda_n \cdot 1^2 = \lambda_n = 0$, а это противоречит анизотропности формы g. Таким образом, $t = n$ и $\lambda_n \neq 0$. Если $0 < s < n$, то

$$g(\sqrt{-\lambda_n}, 0, \ldots, 0, \sqrt{\lambda_1}) = \lambda_1(\sqrt{-\lambda_n})^2 + \lambda_2 \cdot 0^2 + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot 0^2 + \lambda_n(\sqrt{\lambda_1})^2 = 0,$$

что опять противоречит анизотропности формы g, так как $\sqrt{-\lambda_n} \neq 0$. Таким образом, есть лишь две возможности:

$s = n$, и тогда форма g и изометричная ей форма f положительно определены;
$s = 0$, $t = n$, и тогда формы g и f отрицательно определены.

Пусть f – анизотропная форма над $\mathbb{R}$; положим $\varepsilon(f) = 1$, если форма f положительно определена, $\varepsilon(f) = -1$, если форма f отрицательно определена. Нулевая форма f (т.е. форма от 0 переменных) тоже должна быть признана анизотропной; для нее мы положим $\varepsilon(f) = 0$. Число $\varepsilon(f)$ называется знаком анизотропной формы f; ясно, что у изометричных анизотропных вещественных форм знаки одинаковы.

§ 7. Разложение Витта

1°. **Разложение квадратичной формы в ортогональную сумму анизотропной формы, гиперболической формы и формы с нулевыми коэффициентами.** Мы возвращаемся к рассмотрению квадратичных форм над произвольным полем k, характеристика которого не равна 2. Невырожденная квадратичная форма над k называется гиперболической, если она изометрична над k ортогональной сумме нескольких (быть может, 0) квадратичных форм, каждая из которых изометрична форме $y^2 - z^2$. Таким образом, любая гиперболическая форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ изометрична форме вида

$$h(y_1, z_1, \ldots, y_w, z_w) = (y_1^2 - z_1^2) + \ldots + (y_w^2 - z_w^2);$$

ее ранг $n = r(f)$ обязательно четен, а целое число $w = r(f)/2$ называется индексом Витта гиперболической формы f и обозначается $w(f)$. Заметим, что все гиперболические формы с одинаковым индексом Витта, очевидно, изометричны.

Теорема 1. *Всякая квадратичная форма над полем, характеристика которого не равна 2, изометрична ортогональной сумме анизотропной формы, гиперболической формы и формы с нулевыми коэффициентами.*

Доказательство. Мы покажем, что если форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ не анизотропна, то она изометрична форме $0 \cdot y_1^2 \perp g(y_2, \ldots, y_n)$ или форме $(y_1^2 - y_2^2) \perp g_1(y_3, \ldots, y_n)$, где g, g_1 – какие-то формы от меньшего числа переменных; отсюда утверждение теоремы получится тривиальной индукцией.

Итак, пусть форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ не анизотропна; тогда существуют элементы $a_1, \ldots, a_n$ поля k, не все равные 0, такие что $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Столбец $(a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ ненулевой; поэтому он может быть включен в качестве первого элемента в базис пространства столбцов k^n. Пусть C – матрица, столбцами которой являются элементы этого базиса; напомним, что ее первый столбец состоит из элементов $a_1, \ldots, a_n$.

Пусть, далее, $g(z_1,\dots,z_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}z_iz_j$ – форма, полученная из f преобразованием переменных $(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}=C(z_1,\dots,z_n)^{\mathrm{T}}$; по предложению 2.2 мы получаем, что $b_{11}=f(a_1,\dots,a_n)=0$. Если $b_{12}=\dots=b_{1n}=0$, то форма h уже разложена в ортогональную сумму формы $0\cdot z_1^2$ и формы $\sum\limits_{i,j=2}^{n} b_{ij}z_iz_j$. Если же найдется такой индекс $j>1$, что $b_{1j}\neq 0$, то, перенумеровав, если надо, переменные, сведем все к случаю, когда $b_{12}\neq 0$; по лемме 3.2 форма g изометрична тогда форме вида $(y_1^2-y_2^2)\perp g_1(y_3,\dots,y_n)$.

Для квадратичной формы f обозначим через $[f]$ класс всех форм, изометричных форме f. Пусть f, g – две квадратичные формы, и пусть f_1, g_1 – изометричные им квадратичные формы, у которых множества переменных не пересекаются. Положим $[f]\perp[g]=[f_1\perp g_1]$. Мы опускаем тривиальные рассуждения, доказывающие корректность определения. Отметим только, что мы не случайно употребили термин "класс форм", а не "множество форм", потому что все формы, изометричные данной, не образуют множество.

Теорему 1 теперь можно переформулировать так: любой класс $[f]$ квадратичных форм раскладывается в ортогональную сумму $[f]=[g]\perp[h]\perp[q]$, где класс $[g]$ состоит из анизотропных форм, класс $[h]$ – из гиперболических форм, класс $[q]$ из форм с нулевыми коэффициентами. Это разложение называется разложением Витта класса квадратичных форм $[f]$, или, допуская вольность речи, разложением Витта формы f.

2°. **Единственность разложения Витта. Индекс Витта.** Мы покажем теперь, что построенное в предыдущем пункте разложение Витта классов изометричных квадратичных форм единственно.

Теорема 2 (Витт). *Пусть квадратичная форма f над полем, характеристика которого отлична от 2, изометрична ортогональной сумме $g\perp h\perp q$ и ортогональной сумме $g'\perp h'\perp q'$, где g,g' – анизотропные формы, h,h' – гиперболические формы, q,q' – формы с нулевыми коэффициентами. Тогда формы g и g' изометричны, формы h и h' изометричны, формы q и q' изометричны. В частности, ранг $r(g)$ и множество значений анизотропного слагаемого g и индекс Витта $w(h)$ гиперболического слагаемого h зависят только от формы f.*

Доказательство. Поскольку гиперболическая форма изометрична ортогональной сумме нескольких форм, изометричных z^2-u^2, можно считать, что гиперболические слагаемые h,h' в этих разложениях имеют вид

$$h=(z_1^2-u_1^2)+\dots+(z_w^2-u_w^2)\qquad h'=(z_1^2-u_1^2)+\dots+(z_{w'}^2-u_{w'}^2).$$

Пусть теперь форма $f(x_1,\dots,x_n)$ изометрична ортогональным суммам

$$g(y_1,\dots,y_m)\ \perp((z_1^2-u_1^2)+\dots+(z_w^2-u_w^2))\ \perp(0\cdot v_1^2+\dots+0\cdot v_l^2),$$
$$g'(y_1,\dots,y_{m'})\perp((z_1^2-u_1^2)+\dots+(z_{w'}^2-u_{w'}^2))\perp(0\cdot v_1^2+\dots+0\cdot v_{l'}^2),$$

в которых формы g, g' анизотропны. Число переменных в изометричных формах одинаково, поэтому $n=m+2w+l=m'+2w'+l'$. Поскольку анизотропные и гиперболические формы невырождены, их ранги равны количествам переменных, от которых они зависят. Напомним, что ранг ортогональной суммы равен сумме рангов слагаемых, а ранги изометричных форм совпадают. Отсюда сразу следует, что $r(f)=m+2w=m'+2w'$, а потому $l=n-r(f)=l'$. По закону сокращения мы получаем теперь, что формы

$$f_1(y_1,\dots,y_m)\ \perp(z_1^2-u_1^2)\perp\dots\perp(z_w^2-u_w^2),$$
$$f_2(y_1,\dots,y_{m'})\perp(z_1^2-u_1^2)\perp\dots\perp(z_{w'}^2-u_{w'}^2)$$

изометричны. Пусть $s = w - w' > 0$; тогда по закону сокращения анизотропная форма $g'(y_1, \ldots, y_{m'})$ изометрична не анизотропной форме

$$g(y_1, \ldots, y_m) \perp (z_1^2 - u_1^2) \perp \ldots \perp (z_s^2 - u_s^2),$$

что невозможно. Точно так же, не может выполняться неравенство $w' - w > 0$. Таким образом, $w = w'$, и, последний раз пользуясь законом сокращения, мы получаем, что g_1 и g_2 – изометричные формы.

Из этой теоремы следует, что индекс Витта $w(h)$ гиперболической составляющей h в разложении Витта формы f является инвариантом этой формы; он называется индексом Витта формы f и обозначается $w(f)$. Таким образом, мы знаем уже три инварианта квадратичной формы f, которые у изометричных форм одинаковы: число переменных n, ранг $r(f)$ и индекс Витта $w(f)$. Заметим, что гиперболическая составляющая и составляющая с нулевыми коэффициентами формы f определены этими параметрами однозначно (с точностью до изометричности). Напротив, анизотропные формы, вообще говоря, трудно описать при помощи какого-то набора параметров. Конечно, инвариантны их ранги и множества значений; кроме того, мы знаем, что всякая форма диагонализируема. Но наборы диагональных коэффициентов изометричных форм определены далеко не однозначно, и полной ясности здесь нет даже для форм над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. И только для некоторых полей (алгебраически замкнутых полей, конечных полей, поля вещественных чисел и некоторых других) удается довести до конца классификацию квадратичных форм с точностью до изометричности.

3°. **Уточнение закона инерции квадратичных форм.** Пусть f – квадратичная форма над $\mathbb{R}$. По теореме Витта анизотропная составляющая g в разложении Витта формы f определена однозначно с точностью до изометричности; поэтому знак $\varepsilon(g)$ определен формой f однозначно; он обозначается $\varepsilon(f)$ и называется знаком анизотропной составляющей формы f.

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем вещественных чисел, $r(f)$, $w(f)$, $\varepsilon(f)$ – ее ранг, индекс Витта и знак анизотропной составляющей, и пусть форма f изометрична квадратичной форме*

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_s y_s^2 - \lambda_{s+1} y_{s+1}^2 - \lambda_{s+t} y_{s+t}^2,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_{s+t} > 0$. Тогда то из чисел s, t, которое не больше другого, равно $w(f)$, а другое из этих чисел равно $r(f) - w(f)$; при этом $s > t$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon(f) = 1$.

Доказательство. Преобразование

$$y_i = z_i / \sqrt{|\lambda_i|} \quad \text{при} \ \ 1 \le i \le s+t, \qquad y_i = z_i \quad \text{при} \ \ s+t < i \le n$$

превращает форму $g(y_1, \ldots, y_n)$ в форму

$$h(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \ldots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \ldots - z_{s+t}^2 + 0 \cdot z_{s+t+1}^2 + \ldots + 0 \cdot z_n^2.$$

Ранг формы h равен, очевидно, $s+t$, так что $s+t = r(h) = r(f)$. Если $s > t$, то

$$h = (z_{t+1}^2 + \ldots + z_s^2) \perp ((z_1^2 - z_{s+1}^2) + \ldots + (z_t^2 - z_{s+t}^2)) \perp (0 \cdot z_{s+t+1}^2 + \ldots + 0 \cdot z_n^2)$$

– разложение Витта формы h в ортогональную сумму анизотропной формы, гиперболической формы и формы с нулевыми коэффициентами. Анизотропная составляющая $z_{t+1}^2 + \ldots + z_s^2$ положительно определена, поэтому $\varepsilon(f) = \varepsilon(h) = 1$. Далее, ясно, что $w(f) = w(h) = t$. Наконец, $s = (s+t) - t = r(f) - w(f)$. Аналогично, при $s \le t$ разложение Витта формы h имеет вид

$$(-z_{2s+1}^2 - \ldots - z_{s+t}^2) \perp ((z_1^2 - z_{s+1}^2) + \ldots + (z_s^2 - z_{2s}^2)) \perp (0 \cdot z_{s+t+1}^2 + \ldots + 0 \cdot z_n^2);$$

в этом случае $\varepsilon(f) = \varepsilon(h)$ равняется 0 или -1 (в зависимости от того, равны числа s и t или $s < t$), $w(f) = w(h) = s$, $t = (t + s) - s = r(f) - w(f)$. Теорема доказана.