

**ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ**  
(прикладная математика, 1-й семестр 2004/05)

*А. А. Лоджин*

1. Отображения: образ и прообраз множества, инъективность, сюръективность, сужение и продолжение функции.
2. Обратное отображение, суперпозиция отображений.
3. Аксиома полноты.  $\text{Supremum}$  и  $\text{infimum}$ . Свойства.
4. Ограниченность  $\mathbb{N}$ . Принцип Архимеда.
5. Плотность множества рациональных чисел на числовой прямой.
6. Теорема о вложенных отрезках.
7. Представимость чисел бесконечными дробями по основанию  $q$ .
8. Мощность множества. Понятия о конечном, бесконечном, счетном множествах.
9. Эквивалентные множества. Мощность. Сравнение мощностей. Конечные, счетные и несчетные множества.
10. Теорема об объединении счетных множеств. Примеры счетных множеств.
11. Несчетность множества  $\mathbb{R}$ .
12. Точки сгущения. Различные определения предела. Односторонний предел.
13. Свойства предела.
14. Бесконечно малые и их свойства.
15. Арифметические операции над пределами.
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .
17. Расширенная числовая прямая. Пределы в  $\overline{\mathbb{R}}$ .
18. Предел последовательности. Подпоследовательность и ее предел.
19. Определение предела по Гейне предела функции (на языке последовательностей).
20. Предел монотонной функции и последовательности.
21. Примеры применения теоремы о пределе монотонной функции.
22. Число  $e$ .
23. Принцип выбора Больцано – Вейерштрасса.
24. Сходимость в себе, принцип сходимости Больцано – Коши.
25. Непрерывность функции, виды разрывов.
26. Свойства непрерывных функций. Примеры.
27. Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях. Примеры.
28. Разрывы монотонной функции.
29. Теоремы о монотонной функции на промежутке.
30. Определение и свойства функции «корень».
31. Показательная функция (экспонента).
32. Символы  $O$ ,  $o$ ,  $\sim$ . Различные формы записи замечательных пределов.
33. Теорема Вейерштрасса.
34. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
35. Задачи, приводящие к понятию производной.
36. Дифференцируемость функции, связь с наличием производной и непрерывностью. Примеры.

37. Дифференцируемость суммы, произведения, частного.
38. Дифференцируемость суперпозиции и обратной функции.
39. Свойства производной.
40. Таблица производных.
41. Теоремы Ферма́ и Ролля.
42. Теоремы Коши и Лагранжа.
43. Производные и монотонность.
44. Признак строгой монотонности.
45. Доказательство неравенств.
46. Правила Лопиталя (доказать одно из двух).
47. Формула Тейлора для многочлена.
48. Асимптотическая формула Тейлора.
49. Разложение элементарных функций.
50. Условия экстремума.
51. Теорема об остатке в форме Лагранжа.
52. Приближенные вычисления с оценкой погрешности.
53. Выпуклость функции (геометрические факты).
54. Неравенство Йенсена.
55. Дифференциальные условия выпуклости.
56. Неравенство Гёльдера.

**Примечание.** Кроме того, необходимо разбираться в следующих вопросах, не вошедших в билеты:

Множества и операции над ними, образ и прообраз, понятие вещественного, натурального и рационального числа, индукция.